

关于谐振腔中的几个问题

文盛乐

(湖南师范大学理学院物理系, 中国 长沙 410081)

摘 要: 论述了具有理想导体壁的谐振腔中各不同谐振频率的电磁场分量所满足的方程和边值条件, 以及总能量与各不同频率的分量场的场能间的关系. 结果表明: 不同频率的谐分量场间的相互作用能对总场能没有贡献, 总场能等于不同频率的场单独存在时的场能之和; 且电场与磁场间有 $\frac{\pi}{2}$ 的位相差, 其场能的时间平均值相等.

关键词: 谐振腔; 谐振频率; 能量

中图分类号: O441.4

文献标识码: A

文章编号: 1000-2537(2002)03-0048-05

The Problems in Resonant Cavity

WEN Sheng-le

(Department of Physics of Science College, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

Abstract: Considered the equation and the boundary conditions satisfied by the components of electromagnetic field with different harmonic frequencies in resonant cavity of ideal conductor wall, and the relation between the total energy of field and the energy of the component field with different frequencies. The result shows that the interaction energy of harmonic components with different frequencies no contributes to the total energy, which is the sum of each field, and there is $\frac{\pi}{2}$ phase difference between the electric-field strength and the magnetic induction, and the mean of time of the field energy is equivalent.

Key words: resonant cavity; resonant frequency; energy

1 谐振腔中的总能量与谐分量场能的关系

在电子技术等实践中, 经常要利用振荡器产生一定频率的电磁波或电磁振荡, 在频率较低时, 大多用 LC 电路组成的振荡器激发; 但当频率较高 (如微波范围) 时, 根据频率公式 $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, 为了减小电感 L 和电容 C 以提高频率, 必然导致振荡电路的强烈辐射损失及焦耳热损耗. 因此, 人们开发了另一类振荡器——谐振腔来产生高频振荡电磁场, 以具有理想导体壁的矩形谐振腔为例, 其中激发的高频振荡电磁场的谐振 (本征) 频率为^[1].

$$\nu_{mnp} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\left(\frac{m}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{p}{L_3}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

式中 L_1, L_2, L_3 为矩形谐振腔的尺寸 (三条棱之长), $m, n, p = 0, 1, 2, \dots$, ϵ 和 μ 为腔内介质的介电常数及磁导率, 它们一般为频率的函数, 但在定频下为常量 (设介质是均匀的). 若腔中空, 则

收稿日期: 2002-04-17

作者简介: 文盛乐 (1948-), 男, 湖南常德人, 湖南师范大学副教授, 主要从事场理论研究。

$$\nu_{mqp} = \frac{C}{2} \left[\left(\frac{m}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n}{L_2} \right)^2 + \left(\frac{p}{L_3} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

其中 C 为真空中的光速. 显然, 当 m, n, p 取不同的整数时, 可得到不同的谐振频率, 即腔中存在有各种不同频率的电磁场, 这就自然会产生如下的问题: 1) 各个不同频率的电磁场的能量间有什么关系, 也就是腔中介质色散将如何影响能量? 总的电磁场能量是否为各不同频率的分量场能量之和, 换句话说, 不同频率的场分量间的相互作用能对总能量有何影响? 2) 电场能与磁场能的时间平均值是否与 LC 振荡器中那样仍是相等的? 作者借助于矢量格林公式及有关定理, 对此作出较为详细的讨论.

1.1 定频分量场的方程及边值关系

在有多不同频率的电磁场分量存在的谐振腔中, 有关推证只能从麦克斯韦方程组出发, 这里事先假定腔具有理想导体壁, 腔中介质均匀且绝缘 ($\rho = 0, \vec{j} = 0$). 设第 α 个 ($\alpha = 1, 2, \dots$) 谐振角频率为 ω_α , 它对应的场量为

$$\vec{E}_\alpha = \vec{E}_\alpha(\vec{x}) e^{-i\omega_\alpha t}, \vec{B}_\alpha = \vec{B}_\alpha(\vec{x}) e^{-i\omega_\alpha t}, \quad (3)$$

腔中总场量由叠加原理得

$$\vec{E} = \sum_\alpha \vec{E}_\alpha(\vec{x}) e^{-i\omega_\alpha t}, \vec{B} = \sum_\alpha \vec{B}_\alpha(\vec{x}) e^{-i\omega_\alpha t}. \quad (4)$$

由麦氏方程组之 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 可得

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \sum_\alpha \vec{E}_\alpha = \sum_\alpha \nabla \times \vec{E}_\alpha = -\frac{\partial}{\partial t} \sum_\alpha \vec{B}_\alpha(\vec{x}) e^{-i\omega_\alpha t} = \sum_\alpha i\omega_\alpha \vec{B}_\alpha.$$

因各 ω_α 互不关联, 要上式恒成立, 则必须

$$\nabla \times \vec{E}_\alpha = i\omega_\alpha \vec{B}_\alpha = i\omega_\alpha \mu_\alpha \vec{H}_\alpha, \quad (5)$$

式中 μ_α (及后面的 ϵ_α) 是考虑到介质色散而引入的参量, 它对应于角频率为 ω_α 时介质的磁导率 (及后面的介电常数). 同理, 由 $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 得

$$\nabla \times \vec{H}_\alpha = -i\omega_\alpha \epsilon_\alpha \vec{E}_\alpha, \nabla \times \vec{B}_\alpha = -i\omega_\alpha \mu_\alpha \epsilon_\alpha \vec{E}_\alpha. \quad (6)$$

由 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho = 0$ 及定频时 $\vec{D}_\alpha = \epsilon_\alpha \vec{E}_\alpha$ 成立, 则有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \nabla \cdot \sum_\alpha \vec{D}_\alpha = \sum_\alpha \epsilon_\alpha \nabla \cdot \vec{E}_\alpha = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_\alpha \epsilon_\alpha \nabla \cdot \vec{E}_\alpha(\vec{x}) e^{-i\omega_\alpha t} = -\sum_\alpha i\omega_\alpha \epsilon_\alpha \nabla \cdot \vec{E}_\alpha = 0. \end{aligned}$$

同样由于各 ϵ_α 互不关联, 所以

$$\nabla \cdot \vec{E}_\alpha = 0. \quad (7)$$

同理, 由 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 可得

$$\nabla \cdot \vec{B}_\alpha = 0. \quad (8)$$

对(5)式再取旋度并利用(6), (7)式, 有

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}_\alpha) &= -\nabla^2 \vec{E}_\alpha = \omega_\alpha^2 \mu_\alpha \epsilon_\alpha \vec{E}_\alpha = k_\alpha^2 \vec{E}_\alpha, \\ k_\alpha &= \omega_\alpha \sqrt{\mu_\alpha \epsilon_\alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

同理处理(6)式, 有

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}_\alpha) = -\nabla^2 \vec{B}_\alpha = k_\alpha^2 \vec{B}_\alpha. \quad (10)$$

(9)、(10)式就是各谐振频率的分量场所满足的方程, 它们就是著名的定态电磁波的亥姆霍兹方程^[1-3].

对于 $\vec{E}_\alpha$ 和 $\vec{B}_\alpha$ (或 $\vec{H}_\alpha$) 的边值条件, 可利用理想导体中场为零而得出的边值条件 $\vec{n} \times \vec{E}_\alpha|_s = 0, \vec{n} \cdot \vec{B}_\alpha|_s$

$= 0$, 及 $\vec{n} \cdot \vec{H}_s|_s = \vec{\alpha}$, 可得

$$\vec{n} \times \vec{E}|_s = \vec{n} \times \sum_a \vec{E}_a|_s = \sum_a \vec{n} \times \vec{E}_a|_s = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{n} \times \vec{E}|_s) = \frac{\partial}{\partial t}(\sum_a \vec{n} \times \vec{E}_a|_s) = \sum_a (-i\omega_a \vec{n} \times \vec{E}_a|_s) = 0. \quad (12)$$

据前已述的理由, 各 ω_a 互不关联, 则有

$$\vec{n} \times \vec{E}_a|_s = 0. \quad (13)$$

同理可得

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_a|_s = 0, \vec{n} \times \vec{H}_a|_s = \vec{i}_a. \quad (14)$$

其中 $\vec{i}_a$ 是 $\vec{H}_a$ 单独存在时在边界壁面上对应的面电流密度. (13) 与 (14) 式就是各谐振分量场满足的边值关系(条件).

1.2 矢量格林公式

设有二矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 在区域 V 中连续且有连续的一阶偏导数, 在 V 的边界面 S 上存在, 则有矢量形成的格林公式

$$\oint_s [\vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b})] \cdot d\vec{s} = \int_V \{ \vec{a} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{a})] - \vec{b} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{a})] \} dV, \quad (15)$$

其证明很简单, 因为上式

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \int_V \nabla \cdot [\vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b})] dV = \\ &= \int_V \{ (\nabla \times \vec{b}) \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{b} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{a})] - (\nabla \times \vec{a}) \cdot (\nabla \times \vec{b}) + \vec{a} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{b})] \} dV = \\ &= \int_V \{ \vec{a} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{b})] - \vec{b} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{a})] \} dV = \text{右边}. \end{aligned}$$

在下一节, 我们将利用这一公式作相应论证.

1.3 总场能与各谐振频率分量场能间的关系

谐振腔中的总电场能量

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sum_a \vec{D}_a) \cdot (\sum_\beta \vec{E}_\beta) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V [\sum_{a=\beta} \epsilon_a E_a^2 + \sum_{a \neq \beta} \epsilon_a \vec{E}_a \cdot \vec{E}_\beta] dV. \end{aligned} \quad (16)$$

在 (15) 式中, 令 $\vec{a} = \vec{D}_a = \epsilon_a \vec{E}_a$, $\vec{b} = \vec{E}_\beta$ ($a \neq \beta$), 并利用 (9)、(13) 式, 可得

$$\begin{aligned} &\int_V \{ \epsilon_a \vec{E}_a \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{E}_\beta)] - \vec{E}_\beta \cdot [\nabla \times (\nabla \times \epsilon_a \vec{E}_a)] \} dV = \\ &= \int_V \{ \epsilon_a \vec{E}_a \cdot k_\beta^2 \vec{E}_\beta - \vec{E}_\beta \cdot \epsilon_a k_a^2 \vec{E}_a \} dV = (k_\beta^2 - k_a^2) \int_V \epsilon_a \vec{E}_a \cdot \vec{E}_\beta dV = \\ &= \oint_s [\vec{E}_\beta \times (\nabla \times \epsilon_a \vec{E}_a) - \epsilon_a \vec{E}_a \times (\nabla \times \vec{E}_\beta)] \cdot d\vec{s} = \\ &= \oint_s \epsilon_a [(\vec{E}_\beta \times \vec{E}_\beta) \cdot (\nabla \times \vec{E}_a) - (\vec{E}_a \times \vec{E}_a) \cdot (\nabla \times \vec{E}_\beta)] = 0. \end{aligned}$$

其中已利用了定频时 ϵ_a, k_a, k_β 均为常量, 因 $k_a \neq k_\beta$ ($a \neq \beta$), 于是

$$\int_V \epsilon_a \vec{E}_a \cdot \vec{E}_\beta dV = 0, \quad \int_V \vec{E}_a \cdot \vec{E}_\beta dV = 0. \quad (17)$$

(17) 式说明: 在具有理想导体壁的谐振腔中 (不限于矩形谐振腔), 不同频率的电场的相互作用能对总电场能的贡献为零. 将 (17) 式代入 (16) 式可得

$$W_e = \sum_a \frac{1}{2} \int_V \epsilon_a E_a^2 dV = \sum_a W_{ea}, \quad (18)$$

式中 $W_{ea} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_a E_a^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{D}_a \cdot \vec{E}_a dV$ 为只有角频率 ω_a 的电场存在时的电场能。

对于总磁场能的推证,可以利用关系式(5)进行

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int_V \left(\sum_a \vec{B}_a \right) \cdot \left(\sum_\beta \vec{H}_\beta \right) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \sum_{a=\beta} \mu_a H_a^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \sum_{a \neq \beta} \mu_a \vec{H}_a \cdot \vec{H}_\beta dV, \end{aligned} \quad (19)$$

其中第二项

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \sum_{a \neq \beta} \mu_a \vec{H}_a \cdot \vec{H}_\beta dV &= \frac{1}{2} \sum_{a \neq \beta} \int_V \left(-\frac{i}{\omega_a} \nabla \times \vec{E}_a \right) \cdot \left(-\frac{i}{\omega_\beta \mu_\beta} \nabla \times \vec{E}_\beta \right) dV = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{a \neq \beta} \frac{1}{\omega_a \omega_\beta \mu_\beta} \int_V (\nabla \times \vec{E}_a) \cdot (\nabla \times \vec{E}_\beta) dV \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{E}_a) \cdot (\nabla \times \vec{E}_\beta) &= \nabla \cdot [\vec{E}_a \times (\nabla \times \vec{E}_\beta)] + \vec{E}_a \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{E}_\beta)] = \\ &= \nabla \cdot [\vec{E}_a \times (\nabla \times \vec{E}_\beta)] + k_\beta^2 \vec{E}_a \cdot \vec{E}_\beta, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \times \vec{E}_a) \cdot (\nabla \times \vec{E}_\beta) dV &= \oint_S d\vec{s} \cdot [\vec{E}_a \times (\nabla \times \vec{E}_\beta)] + \int_V k_\beta^2 \vec{E}_a \cdot \vec{E}_\beta dV = \\ &= \oint_S (d\vec{s} \times \vec{E}_a) \cdot (\nabla \times \vec{E}_\beta) + k_\beta^2 \int_V \vec{E}_a \cdot \vec{E}_\beta dV = 0. \end{aligned}$$

二积分均为零是利用了(13)式及(17)式,于是

$$\frac{1}{2} \int_V \sum_{a \neq \beta} \mu_a \vec{H}_a \cdot \vec{H}_\beta dV = 0, \quad \int_V \vec{B}_a \cdot \vec{H}_\beta dV = 0. \quad (20)$$

(20)式表明,不同频率的磁场的相互作用能对总磁场能也没有贡献。

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \sum_{a=\beta} \mu_a H_a^2 dV = \sum_a \frac{1}{2} \int_V \mu_a \vec{H}_a^2 dV = \sum_a W_{ma}, \quad (21)$$

其中 $W_{ma} = \frac{1}{2} \int_V \mu_a H_a^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{B}_a \cdot \vec{H}_a dV$ 是只有角频率为 ω_a 的磁场存在时的磁场能。(18)和(21)式表明:在谐振腔中,虽然有介质的色散存在($\epsilon = \epsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$),以及存在着不同频率的场间的相互作用(不能一般地说 $\vec{E}_a \cdot \vec{E}_\beta = 0$ 及 $\vec{H}_a \cdot \vec{H}_\beta = 0$),但是总场能却等于各谐振分量场单独存在时所具有的场能之和,总能量中不出现相互作用项.这与一般情况下场叠加后,能量中有相互作用项截然不同(在一般情况 $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, $W_e = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E_1^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \epsilon E_2^2 dV + \int_V \epsilon \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV$, 第三项即为相互作用能,一般不为零)。

2 关于场能的时间平均值问题

实际上,在谐振腔中对某个确定角频率 $\omega_a = \omega_{mnp}$ 的电磁振荡,其电场 $\vec{E}_a$ 的各直角分量为^[1]

$$\begin{cases} E_{ax} = A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z e^{-i\omega_a t}, \\ E_{ay} = A_2 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z e^{-i\omega_a t}, \\ E_{az} = A_3 \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z e^{-i\omega_a t}. \end{cases} \quad (22)$$

由 $\vec{B}_a = -\frac{i}{\omega_a} \nabla \times \vec{E}_a$, 可求得 $\vec{B}_a$ 的各直角分量为

$$\begin{cases} B_{ax} = \frac{k_z A_2 - k_y A_3}{\omega_a} \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z e^{-i(\omega_a t - \frac{\pi}{2})}, \\ B_{ay} = \frac{k_x A_3 - k_z A_1}{\omega_a} \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z e^{-i(\omega_a t - \frac{\pi}{2})}, \\ B_{az} = \frac{k_y A_1 - k_x A_2}{\omega_a} \cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z e^{-i(\omega_a t - \frac{\pi}{2})}. \end{cases} \quad (23)$$

(22) 与 (23) 式表明, $\vec{E}_a$ 与 $\vec{B}_a$ 在时间上存在 $\frac{\pi}{2}$ 的位相差, 这正说明电场能与磁场能间不断相互转换. 电场能与磁场能的时间平均值, 利用公式

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(f^* g),$$

式中 Re 表取实部, $*$ 表取复共轭. 于是

$$\begin{aligned} \langle W_w \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \int_V \vec{D}_a \cdot \vec{E}_a dV \right\rangle = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \int_V \vec{D}_a^* \cdot \vec{E}_a dV = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{Re} \int_V \epsilon_a |\vec{E}_a|^2 dV = \frac{1}{4} \int_V \epsilon_a |\vec{E}_a|^2 dV. \\ \langle W_m \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \int_V \vec{B}_a \cdot \vec{H}_a dV \right\rangle = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \int_V \vec{B}_a^* \cdot \vec{H}_a dV = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{Re} \int_V \left(-\frac{i}{\omega_a} \nabla \times \vec{E}_a \right)^* \cdot \left(-\frac{i}{\omega_a \mu_a} \nabla \times \vec{E}_a \right) dV = \\ &= \frac{1}{4 \omega_a^2 \mu_a} \operatorname{Re} \int_V (\nabla \times \vec{E}_a)^* \cdot (\nabla \times \vec{E}_a) dV. \end{aligned}$$

因为 $\vec{n} \times \vec{E}_a^*|_s = (\vec{n} \times \vec{E}_a|_s)^* = 0$,

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{E}_a)^* \cdot (\nabla \times \vec{E}_a) &= \nabla \cdot [\vec{E}_a^* \times (\nabla \times \vec{E}_a)] + \vec{E}_a^* \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{E}_a)] = \\ &= \nabla \cdot [\vec{E}_a^* \times (\nabla \times \vec{E}_a)] + k_a^2 \vec{E}_a^* \cdot \vec{E}_a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_V (\nabla \times \vec{E}_a)^* \cdot (\nabla \times \vec{E}_a) dV &= \oint_s d\vec{s} \cdot [\vec{E}_a^* \times (\nabla \times \vec{E}_a)] + \int_V k_a^2 \vec{E}_a^* \cdot \vec{E}_a dV = \\ &= \oint_s (d\vec{s} \times \vec{E}_a^*) \cdot (\nabla \times \vec{E}_a) + k_a^2 \int_V |\vec{E}_a|^2 dV = \omega_a^2 \mu_a \int_V \epsilon_a |\vec{E}_a|^2 dV, \end{aligned}$$

$$\text{则有 } \langle W_m \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \int_V \vec{B}_a \cdot \vec{H}_a dV \right\rangle = \frac{1}{4} \int_V \epsilon_a |\vec{E}_a|^2 dV,$$

即有 $\langle W_m \rangle = \langle W_w \rangle$,

由 (18) 和 (21) 式, 便得到

$$\langle W_e \rangle = \langle W_m \rangle.$$

它们说明, 在谐振腔中, 不但总的电场能与磁场能的时间平均值是相等的, 而且每一种谐振频率的电场能与磁场能的时间平均值也相等.

3 结束语

本文给出了具有理想导体壁的谐振腔中不同频率的电磁场分量所满足的方程及边值条件, 证明了总场能与各种不同频率的分量场的场能间的关系, 得到的这些结果对于完善谐振腔理论及其设计与应用 (如微波炉中的高频振荡谐振腔等的设计) 均有一定的意义.

参考文献:

- [1] 郭硕鸿. 电动力学. 第二版[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997.
- [2] J. D. 杰克逊. 经典电动力学[M]. 上册. 朱培豫译. 北京: 高等教育出版社, 1978.
- [3] 蔡圣善, 朱耘. 经典电动力学[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1985.