

矩阵光学方法在谐振腔理论中的应用*

吕 百 达

(四川大学物理系)

摘要: 本文使用矩阵光学方法, 对稳定腔和非稳腔的基模特征作了分析和讨论。

Application of matrix optics methods in resonator theory

Lu Baida

(Department of Physics, Sichuan University)

Abstract: In this paper, the characteristics of fundamental mode for stable and unstable resonators are analysed and discussed by using matrix optics methods.

光学谐振腔的理论和实验研究在激光器产生的历史中曾起重要作用。国内统编教材(典型例为[1])中较为系统地讲述了光腔的衍射积分方程理论、高斯光束、稳定腔的等价共焦腔方法和非稳腔的几何成像理论。近年来光腔理论的发展, 特别是矩阵方法的应用^[2]已有可能采用统一而又简明规范的方法对光腔(特别是基模特征)进行解析描述。本文将对矩阵光学方法及其在谐振腔理论中的应用作一分析, 并提出一些看法供讨论。

一、光腔的本征方程和本征值

分析对象设为图1所示相距为 L , 曲率半径分别为 R_1 、 R_2 的反射镜构成的光学谐振

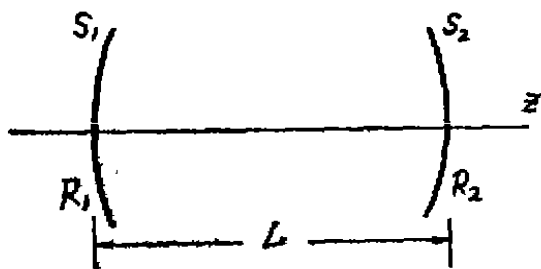


图1 简单两镜光学谐振腔

腔。任意光线汇^[3] $X = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$ (x 、 θ 分别为光线离 z 轴的位置和斜率)在腔内往返一周后变为 $X' = \begin{pmatrix} x' \\ \theta' \end{pmatrix}$, 若光腔的往返一周变换矩阵为 $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 则有

$$X' = TX \quad (1-1)$$

如果 X 为光腔的一个本征态, 它应当满足自再现条件。按照矩阵理论, 这意味着 X 在腔内经一次往返传输后, 除一个常数因子 m 之外, 应再现它本身, 即

$$X' = mX \quad (1-2)$$

由(1-1)、(1-2)式得 $(T - mI)X = 0$

$$(1-3)$$

式中 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为单位矩阵。(1-3)式称为光腔的本征方程。易求出该方程的非奇异解(本征值)为 $m_{1,2} = \frac{A+D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - 1}$

$$(1-4)$$

在求解(1-3)式时, 已利用 $ABCD$ 矩阵的基本关系式 $AD - BC = 1$

$$(1-5)$$

若参考面取在镜 S_1 处, 则有

1988年5月19日收稿

*第三届全国激光物理讨论会专题报告

$$T \begin{pmatrix} 2g_2 - 1 & 2Lg_2 \\ \frac{2}{L}(2g_1g_2 - g_1 - g_2) & 4g_1g_2 - 2g_2 - 1 \end{pmatrix} \quad (1-6)$$

式中 $g_i = 1 - \frac{L}{R_i}$ $i=1,2$ (1-7) 为光腔 g 参数。

m 可用 g 参数写为

$$m_{1,2} = 2g_1g_2 - 1 \pm 2\sqrt{g_1g_2(g_1g_2 - 1)} \quad (1-8)$$

在矩阵理论中, 光腔是按本征值 m 分类的。具体地说, (1) 当 $\left| \frac{A+D}{2} \right| < 1$ (1-9a) 即 $0 < g_1g_2 < 1$

(1-9b) 时, m 为复数,

$$m_{1,2} = e^{i\varphi}, \quad \varphi = \cos^{-1} \left(\frac{A+D}{2} \right) \quad (1-10)$$

满足(1-9)式的光腔称为稳定腔。

(2) 当 $\left| \frac{A+D}{2} \right| > 1$ (1-11a) 即 $g_1g_2 > 1$ 或 $g_1g_2 < 0$ (1-11b) 时, m 为实数。

$m_{1,2} = \pm e^{\pm\theta}$ (1-12) (其中 $g_1g_2 > 1$ 时, 解为 $m_{1,2} = e^{\pm\theta}$, $g_1g_2 < 0$ 时, $M_{1,2} = -e^{\pm\theta}$) 对应光腔称非稳腔。

(3) $\left| \frac{A+D}{2} \right| = 1$ (1-13a), 即 $g_1g_2 = 1$ 或 $g_1g_2 = 0$ (1-13b) 时, $m_{1,2} = \pm 1$ (1-14) 为临界腔 (其中 $g_1 = g_2 = 0$ 的对称共焦腔应除外, 为稳定腔)。

为简单起见, 本文讨论限于均匀反射腔镜的情况。

二、ABCD定律

ABCD定律描述光腔特征参数 Q 的变换规律。对稳定腔, 本征态为高斯光束, 特征参数取为 $\frac{1}{q} = \frac{1}{\rho} - i \frac{\lambda}{\pi w^2}$ (2-1) q 称为高斯光束的复参数。 ρ 、 w 分别为高斯光束等相面曲率半径和光斑尺寸, λ 为波长。

对非稳腔, 本征态为点光束(球面波),

特征参数取为球面波波面曲率半径 r 。使用 Collins 公式易证明^[2], 特征参数 Q 的变换满足 ABCD 定律。即若设由 Q_1 至 Q_2 的变换矩阵为 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 则有 $Q_2 = \frac{AQ_1 + B}{CQ_1 + D}$ (2-2)

(2-2) 式为矩阵光学中的一个基本定律。使用 ABCD 定律, 不仅可以统一描述稳定腔和非稳腔特征参数的传输变换 (包括自再现变换) 规律, 处理几何光学中的成像问题, 而且还能深刻刻划光学系统 (例如光学元件列阵) 的非高斯成像特性。

三、稳定腔的模式理论

在稳定腔中, 设镜 S_1 处复参数为 q_1 的高斯光束在腔内往返一周后变为 q , 它应当满足自再现条件 $q = q_1$ (3-1)

由 ABCD 定律和 (3-1) 式得到

$$q_1 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (3-2)$$

式中 ABCD 为以镜 S_1 为参考, 腔内往返一周矩阵诸元。

(3-2) 式对 q_1^{-1} 求解得

$$\frac{1}{q_1} = \frac{D - A}{2B} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2} \right)^2} \frac{1}{B} \quad (3-3)$$

式中开方前正负号的取舍法则是应使

$\pm \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2} \right)^2}}{B}$ 为负值。对稳定腔, (1-4) 式开方号前应与 (3-3) 式取同一符号。

由 (2-1)、(3-3) 式求出镜 S_1 处高斯光束光斑尺寸 W_1 和等相面曲率半径 ρ_1

$$W_1 = \frac{\lambda |B|}{\pi \sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2} \right)^2}} = \frac{\lambda L}{\pi} \sqrt{\frac{g_2}{g_1(1 - g_1g_2)}} \quad (3-4)$$

$$\rho_1 = \frac{2B}{D - A} = -R_1 \quad (3-5)$$

以镜 S_2 为参数, 类似的推导过程可求得镜 S_2 处高斯光束光斑尺寸 W_2 和等相面曲

率半径 ρ_2

$$W_2 = \frac{\lambda |B'|}{\pi \sqrt{1 - \left(\frac{A' + D'}{2}\right)^2}} \\ = \frac{\lambda L}{\pi} \sqrt{\frac{g_1}{g_2(1 - g_1 g_2)}} \quad (3-6)$$

$$\rho_2 = \frac{2B'}{D' - A'} = -R_2 \quad (3-7)$$

式中 $A'B'C'D'$ 为以镜 S_2 为参考,腔内往返一周矩阵元,且一般有 $A + D = A' + D'$

(3-8)

再利用ABCD定律,易求得束腰大小 w_0 和位置 L_0 :(以镜 S_1 为参考)

$$W_0^2 = \frac{\lambda B}{\pi(1 - AD)} \sqrt{1 - \left(\frac{A + D}{2}\right)^2} \\ = \frac{\lambda L}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}}{|g_1 + g_2 - 2g_1 g_2|} \quad (3-9)$$

$$L_0 = \frac{B(D - A)}{\pi(1 - AD)} = \frac{(1 - g_1)g_2 L}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2} \quad (3-10)$$

(3-4)-(3-7)、(3-9)、(3-10)是描述稳定腔基模参数的重要公式。这些公式用于分析各类简单两镜稳定腔的结果是众所周知的^{[1][4]}

建立稳定腔模式理论的另一途径是等价共焦腔方法^[1]。这一方法固然不失简明之优点,但不严格^[5]。

四、非稳腔的基模特征

非稳腔的基模为球面波(平面波为其特例),由球面波特征参数(曲率半径 r)满足的ABCD定律和自再现条件,经简单推导立即求得

$$\frac{L}{r_i} = g_i - 1 \pm \frac{1}{g_i} \sqrt{g_1 g_2 (g_1 g_2 - 1)} \\ i, j = 1, 2, i \neq j, \text{下同} \quad (4-1a)$$

亦可写为

$$r_i = \frac{g_i(1 - g_i) \pm \sqrt{g_1 g_2 (g_1 g_2 - 1)}}{2g_1 g_2 - g_1 - g_2} L \quad (4-1b)$$

可证明,非稳腔的本征值 $m_{1,2}$ (1-8)就是它的往返一周放大率,其绝对值也等于光腔微扰稳定性判别因子 $F^{(0)}(7)$ 。

利用(1-8)还得到往返一周能量损耗率 Γ 为

$$\Gamma = 1 - \frac{1}{M^2} \quad (4-2)$$

由(4-1)式推得共焦型非稳腔($r_i \rightarrow \infty$)条件为

$$g_1 + g_2 = 2g_1 g_2 \quad (4-3)$$

(4-1)、(4-2)和(1-8)式统一描述了非稳腔的基模特征,它们对各类非稳腔都适用。公式使用中值得注意之处是:(1)对正支非稳腔($g_1 g_2 > 1$), (4-1)、(4-2)、(1-8)式开方前取“+”,对负支非稳腔($g_1 g_2 < 0$)取“-”。(2)对凹面镜,曲率半径 R 为正,凸面镜 R 为负。(3)由球面波的物理图象易知,(4-1)式也是以镜 S_1 为参考,非稳腔中一对共轭球面波物象点位置 P_i 的公式。 r_i 为正负值的意义为,当 $r_i > 0$ 时, P_i 位于镜 S_1 的左方, $r_i < 0$ 时, P_i 位于镜 S_1 的右方, $r_2 > 0$ 时, P_2 在镜 S_2 之右, $r_2 < 0$ 时, P_2 在镜 S_2 之左,由此可知, $r_1 > 0$ 或 $r_1 < -L$ 时,共轭点在腔外, $-L < r_1 < 0$ 时,共轭点在腔内。与[1]中使用的几何成像法相比较,因二者采用不同符号法则,公式形式也不会完全一样,但其描述的物理过程并无差异。显然,矩阵方法更为简明规范。现以凸凹型非稳腔为例说明所得公式的应用。为确定起见,设 $R_1 > 0$, $R_2 < 0$,满足非稳条件(1-11)的凸凹腔可分为:

1. 正支凸凹非稳腔 $R_1 + R_2 > L(g_1 g_2 > 1)$

r_i 可用腔参数写为

$$r_1 = \frac{-\sqrt{L(L - R_1)(L - R_2)(L - R_1 - R_2)}}{2L - R_1 - R_2} \\ - \frac{L(L - R_2)}{2L - R_1 - R_2} \quad (4-4)$$

$$r_2 = \frac{-\sqrt{L(L - R_1)(L - R_2)(L - R_1 - R_2)}}{2L - R_1 - R_2}$$

$$+ \frac{L(R_1 - L)}{2L - R_1 - R_2} \quad (4-5)$$

由(4-4)、(4-5)式易证, 当(1) $R_1 + R_2 > 2L$ 时, $r_1 > 0$, $-R_2 > r_2 > 0$ 。(2) $L < R_1 + R_2 < 2L$ 时, $r_1 < -R_1$, $-R_2 > r_2 > 0$ 。(3) $R_1 + R_2 = 2L$ (正支虚共焦腔)时, 一个共轭点在无穷远, 另一个 $r_2 = -\frac{R_2}{2}$, 故 $0 < r_2 < -R_2$ 。

2. 负支凸凹腔 $0 < R_1 < L (g_1 g_2 < 0)$

$$r_1 = \frac{\sqrt{L(L-R_1)(L-R_2)(L-R_1-R_2)}}{2L-R_1-R_2} - \frac{L(L-R_2)}{2L-R_1-R_2} \quad (4-6)$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{L(L-R_1)(L-R_2)(L-R_1-R_2)}}{2L-R_1-R_2} - \frac{L(L-R_1)}{2L-R_1-R_2} \quad (4-7)$$

由此易证 $-R_1 < r_1 < 0$, $0 < r_2 < -R_2$ 。

使用上述分析方法可得出 g 参数图上各种类型非稳腔共轭物象点的分布规律, 将另文叙述。

五、多元件腔

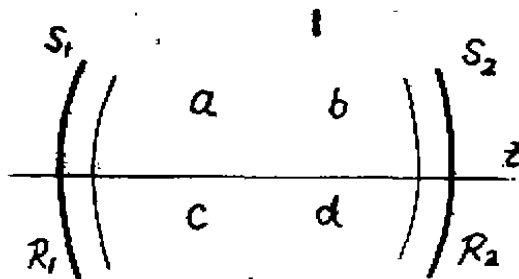


图2 多元件复杂腔

用矩阵方法不仅统一处理了稳定腔和非稳腔的基模问题, 而且, 有关结果易于直接推广到图2所示多元件腔, 这是比之其它方法的又一优点。

1. 多元件稳定腔

设以镜 S_1 为参考, 腔内单程变换矩阵为

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (见图3), 则往返一周矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} 2aG_2 - 1 & 2bG_2 \\ \frac{2}{b}(2aG_1G_2 - G_1 - a^2G_2) & 4G_1G_2 - 2aG_2 - 1 \end{pmatrix} \quad (5-1)$$

$$\text{式中 } G_1 = a - \frac{b}{R_1}, \quad G_2 = d - \frac{b}{R_2} \quad (5-2)$$

为多元件腔的 G 参数。光腔的稳定性条件(1-9a)可用 G 参数表示为 $0 < G_1G_2 < 1$

$$(5-3)$$

仿照节三推导方法, 由镜 S_1 处高斯光束复参数遵守的 $ABCD$ 定律和自再现条件得到镜 S_1 处光斑尺寸 w_1 和等相面曲率半径 ρ_1 为

$$w_1^2 = \frac{\lambda|b|}{\pi} \sqrt{\frac{G_1}{G_1(1-G_1G_2)}} \quad (5-4)$$

$$\rho_1 = -R_1 \quad (5-5)$$

与镜 S_1 相邻束腰 w_{01} 和位置 L_{01} (以 S_1 为参考)

$$w_{01} = \frac{\lambda|b|}{\pi} \sqrt{\frac{G_1G_2(1-G_1G_2)}{|2aG_1G_2 - G_1 - a^2G_2|}} \quad (5-6)$$

$$L_{01} = \frac{bG_2(G_1 - a)}{2aG_1G_2 - G_1 - a^2G_2} \quad (5-7)$$

与镜 S_2 相邻束腰 w_{02} 和位置 L_{02} (以 S_2 为参考)

$$w_{02} = \frac{\lambda|b|}{\pi} \sqrt{\frac{G_1G_2(1-G_1G_2)}{|2dG_1G_2 - G_2 - d^2G_1|}} \quad (5-8)$$

$$L_{02} = \frac{bG_1(G_2 - d)}{2dG_1G_2 - G_2 - d^2G_1} \quad (5-9)$$

与(3-4)~(3-7)、(3-9)、(3-10)相对应, (5-4)~(5-9)为计算多元件稳定腔模参数的基本公式。限于篇幅, 对此问题的进一步讨论和应用请见[4][8]。

2. 多元件非稳腔

当(1-11a)成立, 即 $G_1G_2 > 1$ 或 $G_1G_2 < 0$ (5-10)时, 多元件腔是非稳的。仿照节四推导方法, 由本征球面波往返一周自再现条

件求得镜 S_1 处球面波曲率半径 r_1 (即以镜 S_1 为参考, 共轭物象点位置)为

$$\frac{b}{r_1} = G_1 - a \pm \frac{1}{G_2} \sqrt{G_1 G_2 (G_1 G_2 - 1)} \quad (5-11a)$$

$$\frac{b}{r_2} = G_2 - d \pm \frac{1}{G_1} \sqrt{G_1 G_2 (G_1 G_2 - 1)} \quad (5-12a)$$

或写为

$$r_1 = \frac{G_2(a - G_1) \pm \sqrt{G_1 G_2 (G_1 G_2 - 1)}}{2aG_1 G_2 - a^2 G_2 - G_1} b \quad (5-11b)$$

$$r_2 = \frac{G_1(d - G_2) \pm \sqrt{G_1 G_2 (G_1 G_2 - 1)}}{2dG_1 G_2 - d^2 G_1 - G_2} b \quad (5-12b)$$

往返一周放大率 $m_{1,2}$ 和能量损耗率 Γ

$$m_{1,2} = 2G_1 G_2 - 1 \pm 2\sqrt{G_1 G_2 (G_1 G_2 - 1)} \quad (5-13)$$

$$\Gamma = 1 - \frac{1}{M^2} \quad (5-14)$$

(5-11)~(5-14)描述了多元件非稳腔基模的特征。公式中开方号前正负号取舍法则与前同, 即对正支非稳腔($G_1 G_2 > 1$)取“+”, 对负支非稳腔($G_1 G_2 < 0$)取“-”。

广义共焦条件为

$$G_1 + a^2 G_2 = 2aG_1 G_2$$

$$\text{或} \quad G_2 + d^2 G_1 = 2dG_1 G_2 \quad (5-15)$$

六、结 论

1. 本文统一使用矩阵方法, 即变换矩阵、 $ABCD$ 定律和特征参数的自再现条件对稳定腔和非稳腔作了分析, 得出描述光腔基模特征的基本公式。我们认为, 这是光腔理论中值得重视的一类公式化分析方法。

2. 高功率激光器中因光泵浦热效应会使光腔复杂化。另一方面, 为提高光束质量, 增大 TEM_{00} 模体积等应用目的而常在腔内

插入望远镜系统构成多元件腔^[12]。这使得多元件腔的研究不仅有理论意义而且更富有实际意义。本文的分析表明, 使用矩阵方法, 由简单两镜腔到多元件复杂腔公式的推广是直截了当的。

3. 与等价共焦腔方法和几何成像法比较。矩阵方法的优点是较为严格、规范, 公式和符号法则简明, 适用性强, 并且易于推广。虽然对某些类型的多元件腔, 可通过对每一分臂引入一个等价共焦“子腔”的办法来弥补该方法的某些不足之处, 但这样不仅使“唯一性”产生歧义而且还因人为增加的计算上的繁琐而极少使用。此外, 对于分析相位共轭腔、高斯反射腔和非轴对称腔之类较为复杂的光腔时, 等价共焦腔方法都显得无能为力, 但使用矩阵光学方法, 则可简单地得出物理意义明确的结果。(可见即将出版的“矩阵光学”一书。

参 考 文 献

- [1] 周炳琨等: “激光原理”, 国防工业出版社, 1984
- [2] A. Gerrard et al.: “Introduction to Matrix Methods in Optics”, John Wiley & Sons, 1975
- [3] 王之江、方洪烈: 《光学学报》, 1981, 1(1): 31
- [4] 吕百达: “激光光学”, 四川大学出版社, 1986
- [5] 吕百达: 《中国激光》, 1986 13(10): 662
- [6] A. E. Siegman, IEEE J. Quant. Electron., 1976 QE-12, No. 1, 35
- [7] L. W. Casperson, IEEE J. Quant. Electron., 1974 QE-10, No. 9, 629
- [8] Lu Baida, Chen Wenyu: “Study on Characteristics of Telescopic Resonators”, Report, TQE'88, 1988