

文章编号:1001-2443(2001)02-0169-02

近轴球面折射成象的二级近似与象差

杨震辉, 张 辉, 张小安

(咸阳师范专科学校 物理系, 陕西 咸阳 712000)

摘要:给出了二级近似时近轴球面折射成象的物理规律,进而讨论了横向放大率与象差.

关键词:近轴;折射;二级近似;象差

中图分类号:O435.1

文献标识码:C

1 前言

将费马原理作为几何光学理论的基本出发点,可引出球面成象的一级近似理论.一级近似理论经完整地描述了物象位置、横向放大率、纵向放大率、角放大率,进而给出了近轴物点和近轴光线的制约关系,即亥姆霍兹——拉格朗日定理.

近轴球面折射一级近似理论给出的结论是:象距、横向放大率对于物高的相对独立性,即定点物高被线性放大,象不失真.但是,一级近似理论不能定量地反映近轴成象的象差.为此,本文试图将球面折射成象推进到二级近似,以探求更精确的规律.

2 近轴球面折射成象的二级近似

从Q作线段PQ垂直于主光轴(图1).O点为球面顶点,A点为入射点.考虑笛卡尔符号法描写的线量为代数量,可令图中 $OP = -S$, $OP' = S'$, $AA' = +h$, $OA' = +X$, $PQ = +y$, $P'Q' = -y'$,均为正值.从Q点沿任一光线QA到Q'的光程为

$$\begin{aligned} (QAQ') &= n\sqrt{(-s+x)^2 + (y-h)^2} \\ &\quad + n'\sqrt{(s'-x)^2 + (-y'+h)^2} \\ &= n(-s+n)[1 + (\frac{y-h}{-s+x})^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + n'(s'-x)[1 + (\frac{-y'+h}{s'-x})^2]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

当物点近轴和光线近轴时有

$$y-h \ll -s+x, -y'+h \ll s'-x,$$

利用牛顿二项展开式

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots \text{并取二}$$

级近似,则

$$\begin{aligned} (QAQ') &\approx n(-s+x) - \frac{n}{2}(\frac{y-h}{s-x})^2 \\ &\quad + \frac{n}{8}(\frac{y-h}{s-x})^4 + n'(s'-x) \\ &\quad + \frac{n'}{2}(\frac{y'-h}{s'-x})^2 - \frac{n'}{8}(\frac{y'-h}{s'-x})^4. \end{aligned}$$

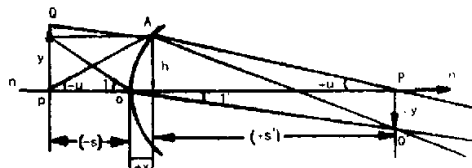


图1

上式中 $\frac{x}{s}, \frac{x}{s'}$ 均为更小量,其二项展开式可取零级近似,则有

$$\frac{1}{s-x} = \frac{1}{s}(1 - \frac{x}{s})^{-1} \approx \frac{1}{s}, \quad \frac{1}{s'-x} \approx \frac{1}{s'}.$$

将此结果用 $x \approx \frac{h^2}{2r}$ 代入光程中

$$\begin{aligned} (QAQ') &\approx -ns + n's' + (n-n')\frac{h^2}{2r} \\ &\quad - n\frac{(y-h)^2}{2s} + n'\frac{(y'-h)^2}{2s'} \\ &\quad + n\frac{y-h}{8s^3} - n'\frac{(y'-h)}{8s'^3} \\ &= -ns + n's' - \frac{ny^2}{2s} + \frac{n'y'^2}{2s'} + \frac{ny^4}{8s^3} \\ &\quad - \frac{n'y'^4}{8s'^3} + h(\frac{ny}{s} - \frac{n'y'}{s'} - \frac{ny^3}{2s^3} + \frac{n'y'^3}{2s'^3}) \\ &\quad + \frac{h^2}{2}(-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} + \frac{n}{r} - \frac{n'}{r} + \frac{3ny^2}{2s^3} \\ &\quad - \frac{3n'y'^2}{2s'^3}) - \frac{h^3}{2}(\frac{ny^3}{s^3} - \frac{n'y'^3}{s'^3}) \\ &\quad + \frac{h^4}{8}(\frac{n}{s^3} - \frac{n'}{s'^3}). \end{aligned}$$

根据费马原理,对任意入射点 h 要等光程则须

$$\frac{ny}{s} - \frac{n'y'}{s'} - \frac{ny^3}{2s^3} + \frac{n'y'^3}{2s'^3} = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} + \frac{n}{r} - \frac{n'}{r'} + \frac{3ny^2}{2s^3} - \frac{3n'y'^2}{2s'^3} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{ny^3}{s^3} - \frac{n'y'^3}{s'^3} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{n}{s^3} - \frac{n'}{s'^3} = 0. \quad (4)$$

3 讨论

当推进级数时,约束方程的个数增加,且每一方程的修正项也增加.通常近轴成象时,均可设定 y, s , (1)、(2) 式为关于 y', s' 的方程,故可联立求解.在近轴成象的情况下,高级小量 h^3, h^4 项可略,故(3)、(4)式为近轴物点和近轴光线的数学表述.进一步分析(1)、(2)式可见,由于变量 s' 与 y' 的相关性,已不能区分哪一个是独立的物象公式,哪一个是独立的横向放大率公式.

3.1 一级近似理论是二级近似理论的简化

将(1)、(2)式改写为

$$\frac{ny}{s} \left(1 - \frac{y^2}{2s^2}\right) - \frac{n'y'}{s'} \left(1 - \frac{y'^2}{2s'^2}\right) = 0, \quad (5)$$

$$-\frac{n}{s} \left(1 - \frac{3y^2}{2s^2}\right) + \frac{n'}{s'} \left(1 - \frac{3y'^2}{2s'^2}\right) - \frac{n' - n}{r} = 0. \quad (6)$$

由此可见,这相当于一级近似理论出现了因子修正,当利用近轴条件,则可退化为一级近似理论.

3.2 象面弯曲

对给定 s 的平面物,其上不同物点 y 的象高 y' 可由(1)、(2)式联立求得,再代入(6)式,可得 $s' = f(y)$,这表明象面出现了弯曲,二级近似情况下这一象差可以定量表示.

3.3 象面畸变

对给定 s 的平面物,其上不同物点 y 的象高 y' 也须由(1)、(2)求得,再代入横向放大率 $\beta = \frac{y'}{y}$ 中,可有 $\beta = f(y)$,结果表明,横向放大率与 y 有关,同 s 的平面物为非线性放大,即象面出现畸变.

3.4 球差与彗差

在满足近轴的情况下,当推进近似级时,(1)、(2)式则为 s', y' 的高次方程,其解具有多值性,这正是球差与彗差的综合表现.

当然,也可以讨论纵向放大率为非线性放大.顺便要指出的,在姚启均先生的《光学教程》中,尽管一级近似成象规律的结果是正确的,但按笛卡尔符号法计得此时光程中的第四项应为 $\frac{n'y'^2}{2s'}$,而非

$$-\frac{n'y'^2}{2s'}.$$

参考文献:

- [1] 姚启均.光学教程[M].北京:高等教育出版社,1981
- [2] 母国光.光学[M].北京:人民教育出版社,1978

THE MORE EXACT LAW AND ABERRATION OF REFRACTION IMAGE ON AXIAL SPHERICAL SURFACE

YANG Zhen-hui, ZHANG Hui, ZHANG Xiao-an

(Department of Physics, Xianyang Teachers' College, Xianyang, Shanxi, 712000, China)

Abstract: The more exact object-image refraction image on axial spherical surface is presented, thereafter the lateral magnification and aberration are discussed.

Key words: axial; refraction; more exact; aberration