

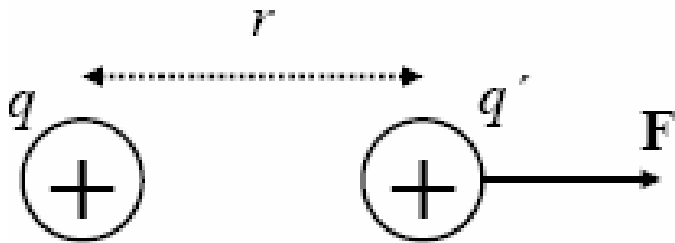
# 迄今为止

- 几何光学
  - 平面和球面的反射和折射
  - 傍轴近似下的成像条件
  - 孔径和光阑
  - 像差（由于违背了傍轴成像条件或因为色散）
- 几何光学有效的前提：所研究对象的几何尺寸要远远大于波长  $\lambda$ 
  - 问题：点物 / 像要小于  $\lambda$  !!!
  - 所以光汇聚到一个点上是我们近似的结果
  - 为理解光在波长  $\lambda$  尺度上的行为，我们需要考虑光的波动性。

# 进入波动光学的第一步：电动力学

- 真空中的电磁场（定义和性质）
- 物质中的电磁场
- 麦克斯韦方程
  - 积分形式
  - 微分形式
  - 能量流和坡印廷矢量
- 电磁波方程

# 电磁力

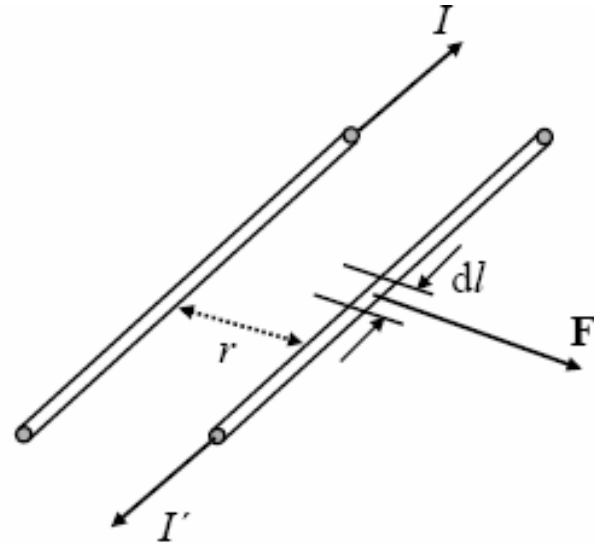


自由电荷

库仑力

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$$

自由空间的介电常数



磁力

$$\frac{d|\mathbf{F}|}{dl} = \mu_0 \frac{II'}{2\pi r}$$

自由空间的磁导率

# 注意单位...

$$\text{库仑力} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{\text{电荷}}{\text{距离}} \right)^2$$

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$$

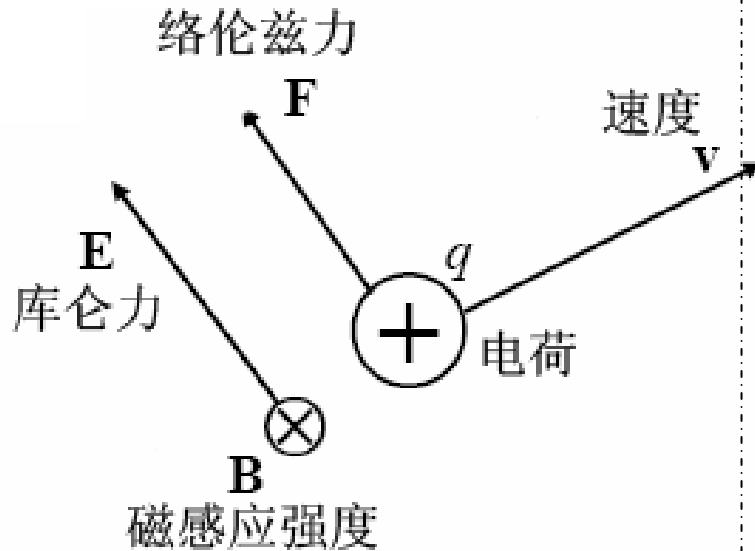
$$\text{磁力} = \mu_0 \left( \frac{\text{电荷}}{\text{时间}} \right)^2$$

$$\frac{d|\mathbf{F}|}{dl} = \mu_0 \frac{II'}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow (\epsilon_0 \mu_0)^{1/2} \equiv \left( \frac{\text{距离}}{\text{时间}} \right) \equiv \text{速度}$$

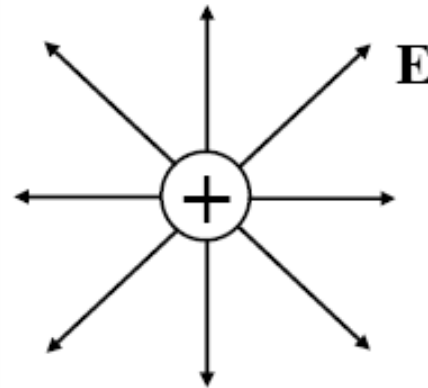
# 电场和磁场

观察结果

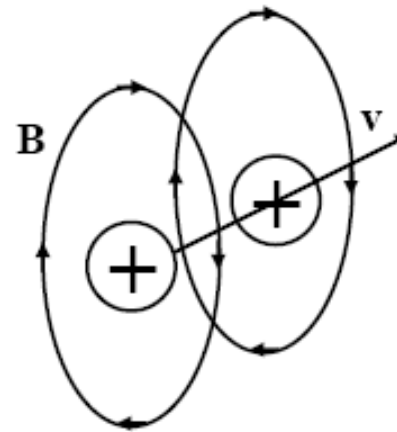


$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

广义化

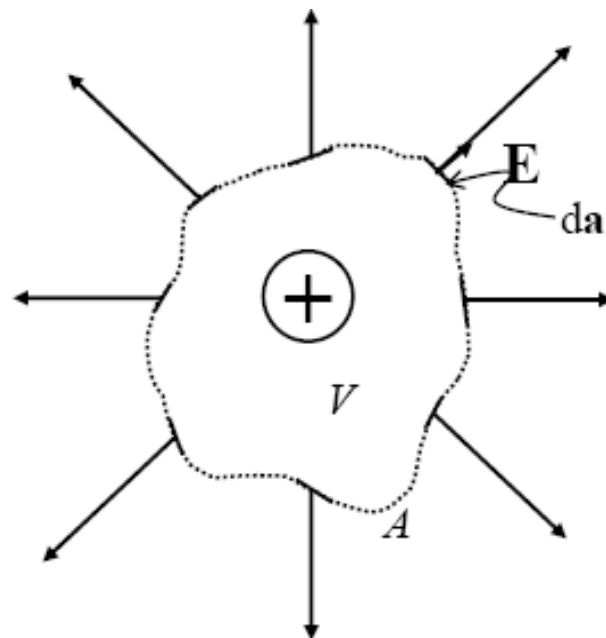
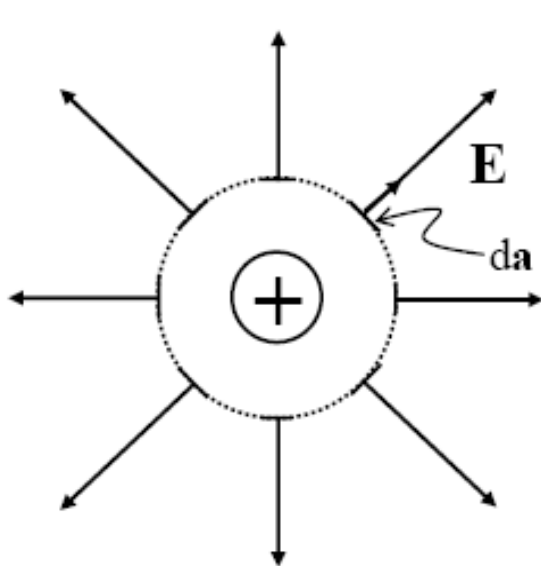


静态电荷  
 $\Rightarrow$   
电场



电流  
(移动电荷)  
 $\Rightarrow$   
磁场

# 高斯定律：电场



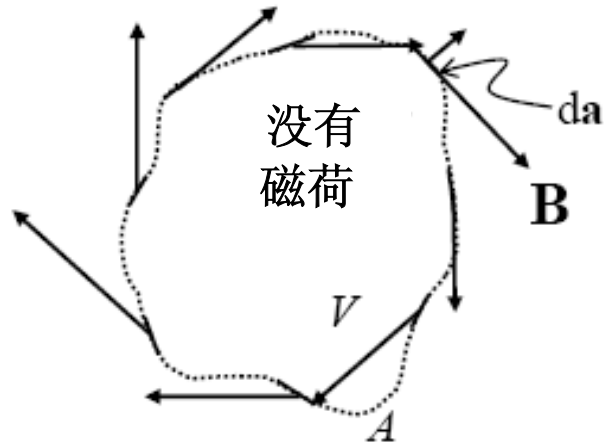
$$\oiint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

电荷密度

高斯定理  
 $\longleftrightarrow$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

# 高斯定律： 磁场



$$\oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

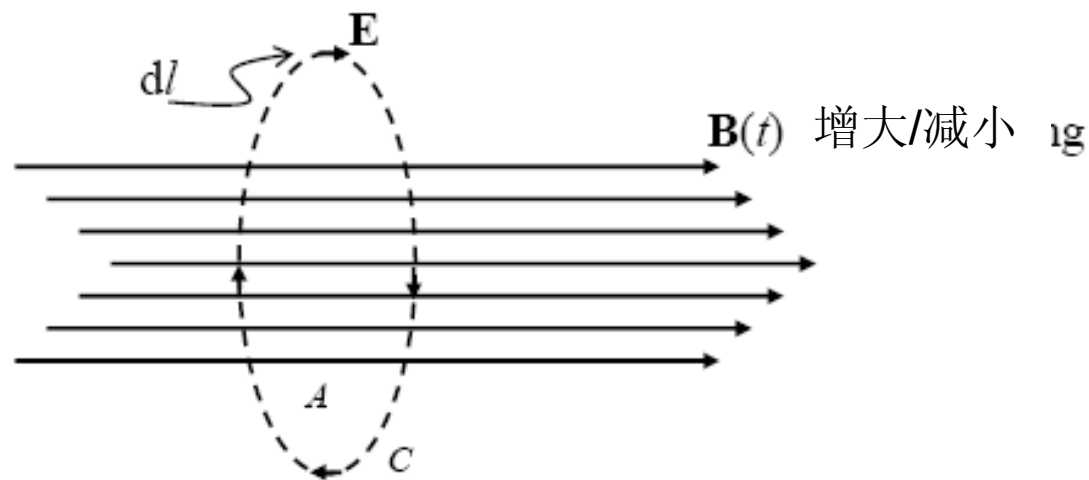
“磁荷”密度

高斯定理



$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

# 法拉第定律： 电动势

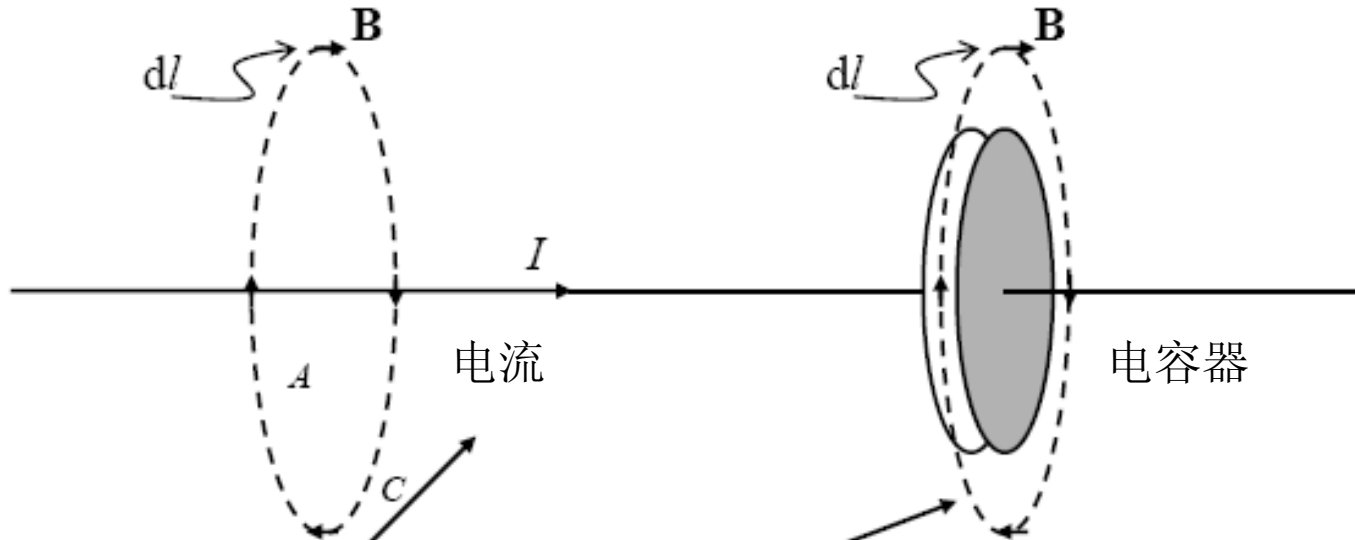


$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \longleftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

斯托克斯定理



# 安培定律：磁感应



$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left( \underbrace{\iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}}_{\text{电流密度}} + \underbrace{\iint_A \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}}_{\text{麦克斯韦的扩展 位移电流}} \right) \xleftrightarrow{\text{斯托克斯定理}} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

# 麦克斯韦方程组

(真空中)

$$\oiint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, dV \quad \longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{高斯/电场}$$

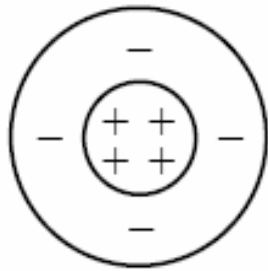
$$\oiint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{高斯/磁场}$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \longleftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{法拉第}$$

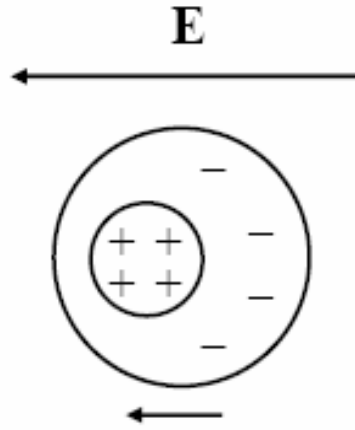
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_A \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \quad \longleftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

安培 - 麦克斯韦

# 电介质中的电场



处于平衡态的原子



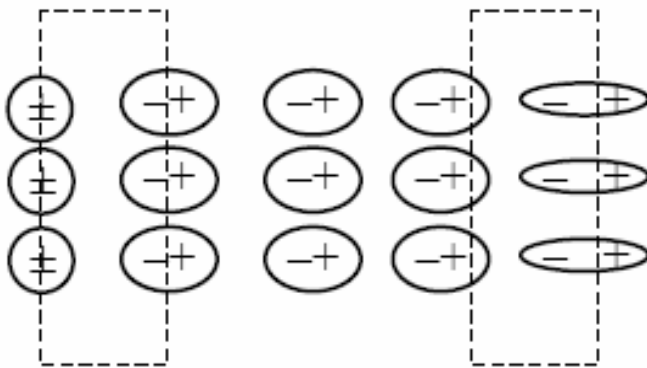
- 电场中的原子：
- 电荷保持中性
  - 电荷的空间分布变的不对称

$$\mathbf{p} = q_+ \mathbf{r}_+ - q_- \mathbf{r}_-$$

偶极子矩

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}$$

极化强度



空间不同的极化  
引起局部电荷的不平衡  
(束缚电荷)

$$\rho_{\text{bound}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

# 电位移

高斯定律：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_{\text{总}} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{\text{自由}} + \rho_{\text{束缚}})$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{\text{自由}} - \nabla \cdot \mathbf{P})$$

$$\nabla \cdot (\underbrace{\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}) = \rho_{\text{自由}}$$

电位移矢量：

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \implies \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{自由}}$$

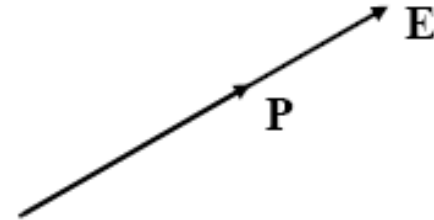
线性，各向同性极化率：

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$$

$$\implies \mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} \equiv \varepsilon \mathbf{E}$$

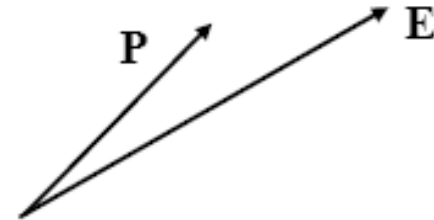
# 一般情况下的极化

线性，各向同性极化率： $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$



线性，各向异性极化率：

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \mathbf{E}$$



非线性，各向同性极化率： $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E} \mathbf{E} + \dots$

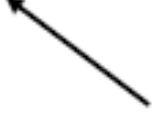
# 本质关系

**E**: 电场强度矢量

**D**: 电位移矢量

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

极化强度

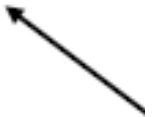


**B**: 磁感应强度矢量

**H**: 磁场强度矢量

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

磁化强度



# 麦克斯韦方程组

(物质中)

$$\oiint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho_{\text{自由}} dV \quad \longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{自由}} \quad \text{高斯/电场}$$

$$\oiint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{高斯/磁场}$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \longleftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{法拉第}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_A \left( \mathbf{J}_{\text{自由}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \quad \longleftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mu_0 \left( \mathbf{J}_{\text{自由}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

安培 - 麦克斯韦

# 麦克斯韦方程组 $\Rightarrow$ 波动方程

(在线性、各向异性、非磁性物质中、没有自由电荷/电流)

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \frac{\partial (\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{物质作为空间和时间的不变量}} \left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} = -\mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \underbrace{\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E})}_{=0} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0}$$

电磁波方程



# 麦克斯韦方程组 $\Rightarrow$ 波动方程

(在线性、各向异性、非磁性物质中、没有自由电荷/电流)

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0}$$

$$\mu_0 \varepsilon \equiv \frac{1}{c^2}$$

波速

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0}$$

# 光速和折射率

$$\mu_0 \epsilon_0 \equiv \frac{1}{c_{\text{真空}}^2}$$

$c_{\text{真空}}$

光在真空中的速度

$$\epsilon = (1 + \chi) \epsilon_0 \equiv n^2 \epsilon_0$$

$n$ : 折射率

$$\mu_0 \epsilon = \frac{n^2}{c_{\text{真空}}^2} \equiv \frac{1}{c^2}$$

$c \equiv c_{\text{真空}}$

$/n$ :

光在折射率为 $n$ 的介质中的速度

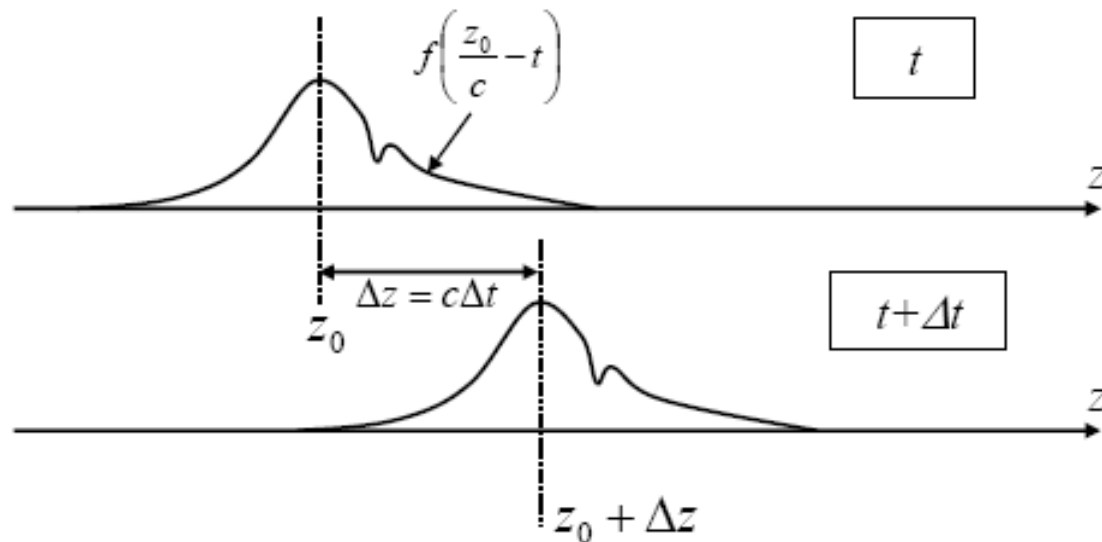
# 简化的（1维，标量）波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0}$$

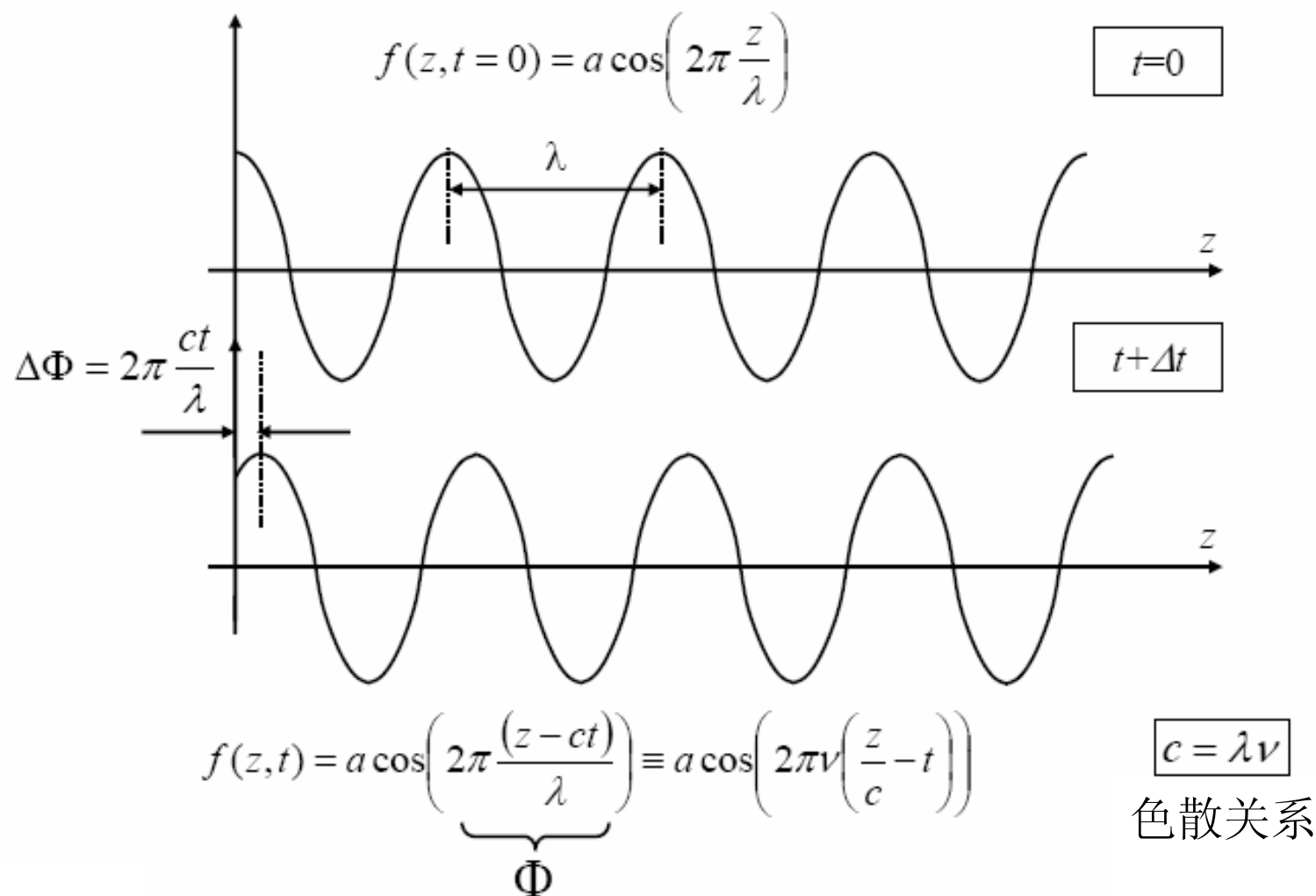
- $E$  是标量（例如  $E_y$  是电场  $\mathbf{E}$  的分量）
- $x, y$  方向几何对称  $\Rightarrow x, y$  的导数为零

解：

$$E(z, t) = f\left(\frac{z}{c} - t\right) + g\left(\frac{z}{c} + t\right)$$



# 特殊情况：谐波解



# 波的复数表示

$$f(z, t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z - 2\pi\nu t - \phi\right)$$

$$f(z, t) = A \cos(kz - \omega t - \phi) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi\nu$$

角频率  
波数

$$f(z, t) = A \cos(kz - \omega t - \phi)$$

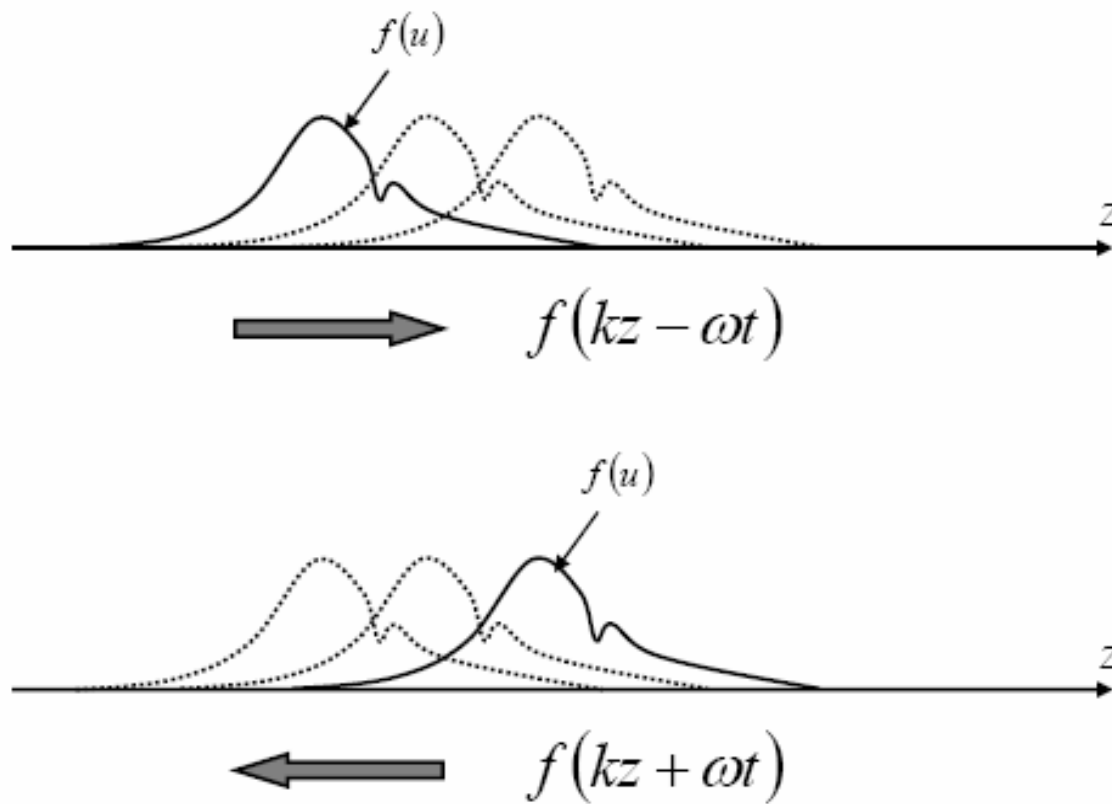
$$\hat{f}(z, t) = A \cos(kz - \omega t - \phi) + iA \sin(kz - \omega t - \phi)$$

$$\text{i.e. } f(z, t) = \text{Re}\{\hat{f}(z, t)\}$$

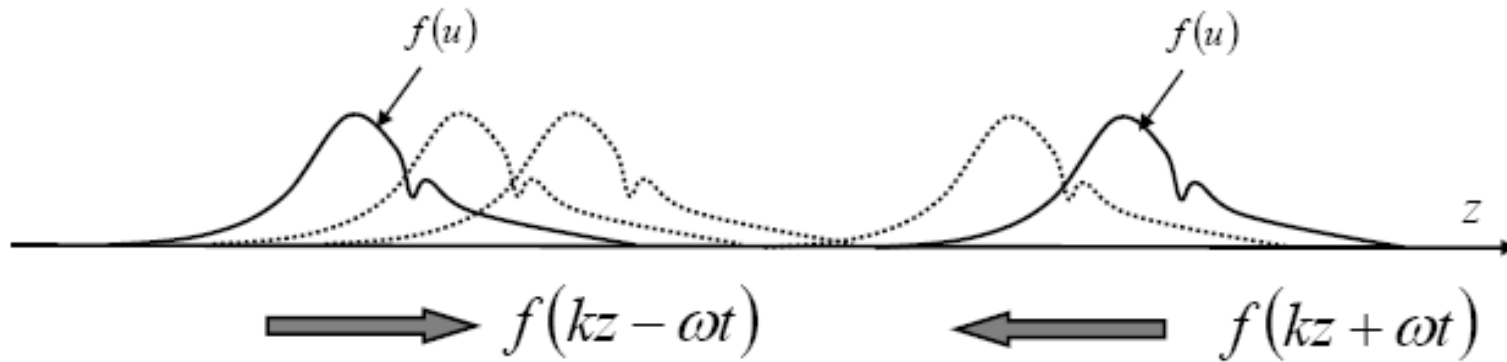
$$\hat{f}(z, t) \quad \text{即} \quad \hat{f}(z, t) = A e^{i(kz - \omega t - \phi)} \quad \text{复数表示}$$

$$A e^{-i\phi} \quad \text{复振幅或 “相量”}$$

# 时间反转



# 叠加



$\Rightarrow f(kz - \omega t) + f(kz + \omega t)$  也是一种解

普遍情况  $f(kz - \omega t) + g(kz + \omega t)$  是一种解

更为普遍情况,

$f_1(kz - \omega t) + f_2(kz - \omega t) + \dots$   
 $+ g_1(kz + \omega t) + g_2(kz + \omega t) + \dots$  是一种解

线性

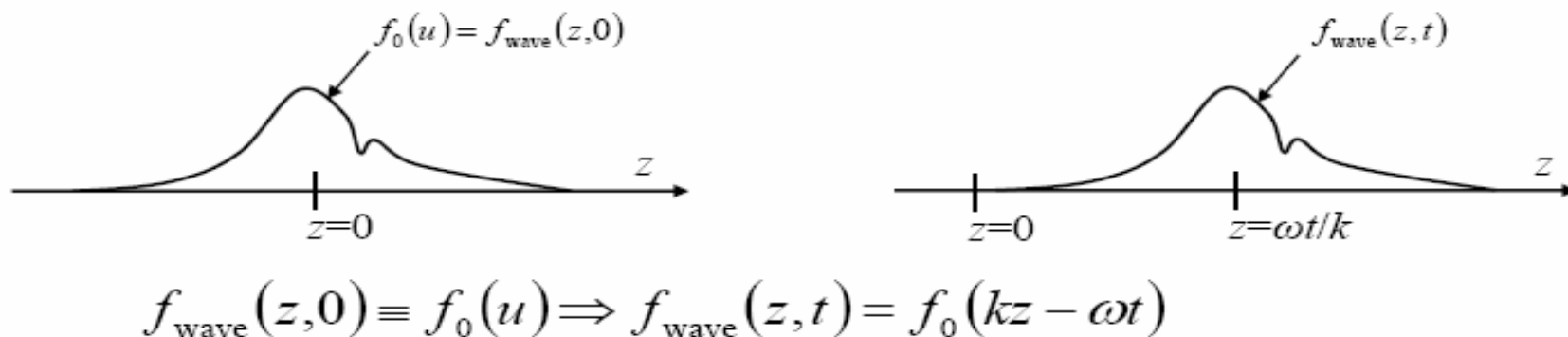


叠加

# 波动方程的解是什么

- 一般情况：解是所传输波的（任意）叠加
- 通常，我们必须利用
  - 初始条件（正如解任何微分方程那样）
  - 边界条件（正如解大部分偏微分方程那样）

范例：初值问题





# 什么是波方程的解

- 一般情况：解是所传输波的（任意）叠加
- 通常，我们必须利用
  - 初始条件（正如解任何微分方程那样）
  - 边界条件（正如解大部分偏微分方程那样）
- 边界条件：在本课中，我们将不化大量篇幅对此进行讨论，但是值得指出的是从波动观点出发边界条件在物理上可以解释很多有趣的现象，如波导现象（在对TIR的讨论中，我们已经看到了一种解释）

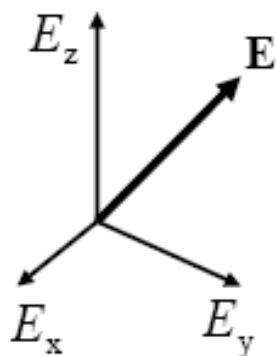
# 基本的波： 平面波，球面波

# EM 矢量波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

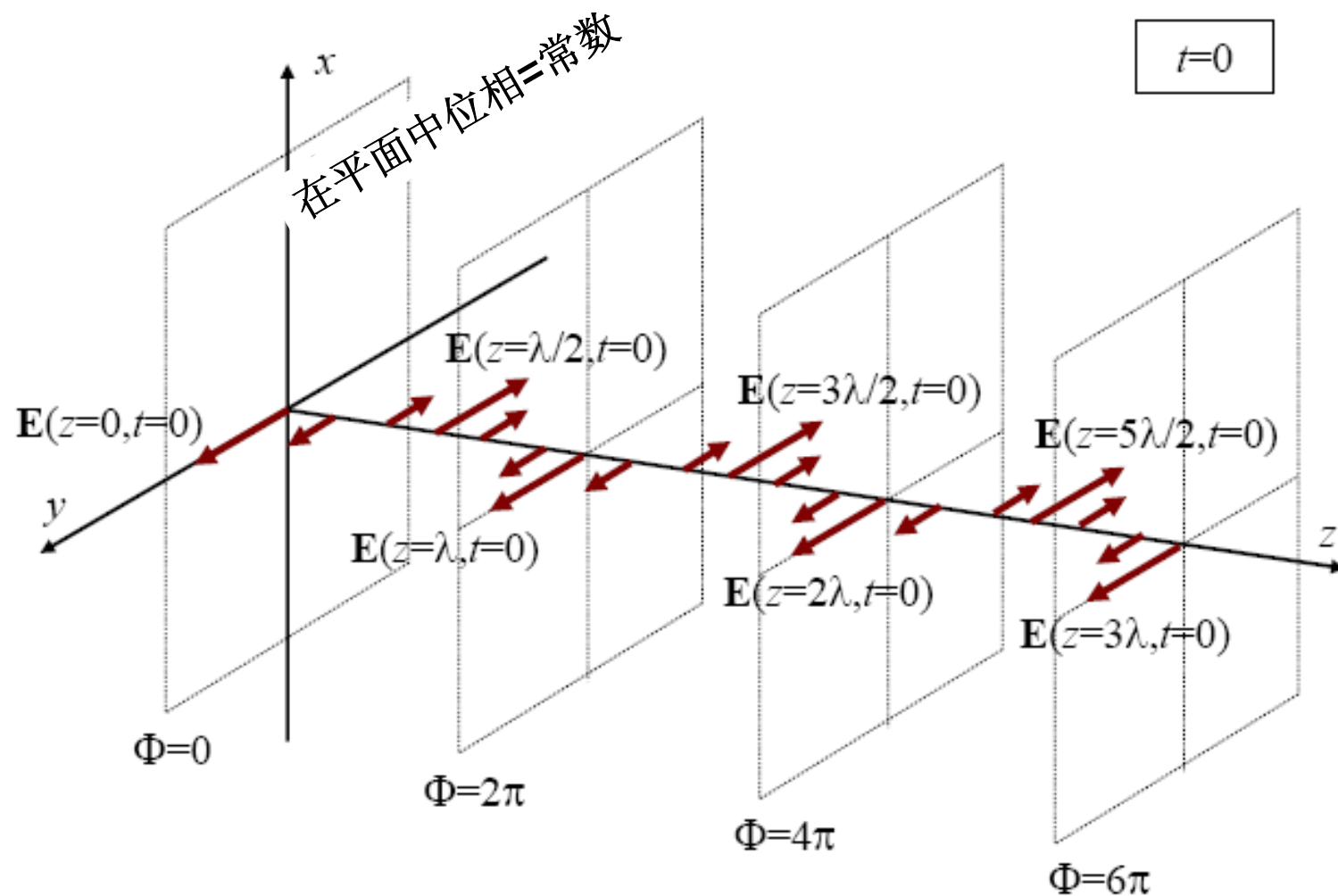
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} + E_z \hat{\mathbf{z}}$$

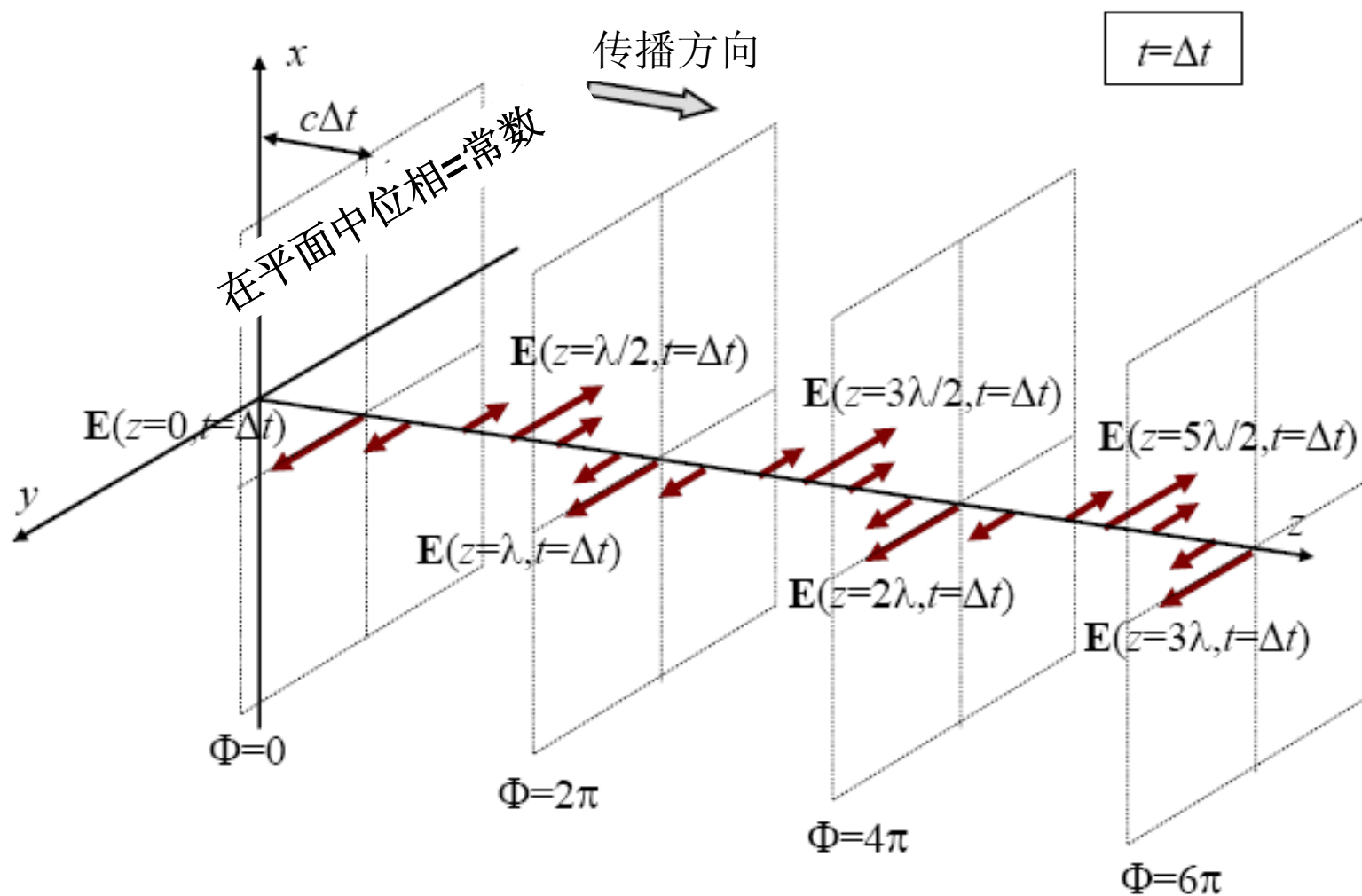


$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

# 三维中的谐波解：平面波



# 平面波的传播



# 三维波的复数表示

$$f(x, y, z, t) = A \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) - \omega t - \phi_0 \right)$$

$$f(x, y, z, t) = A \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t - \phi_0) \quad k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha, \text{ etc.}$$

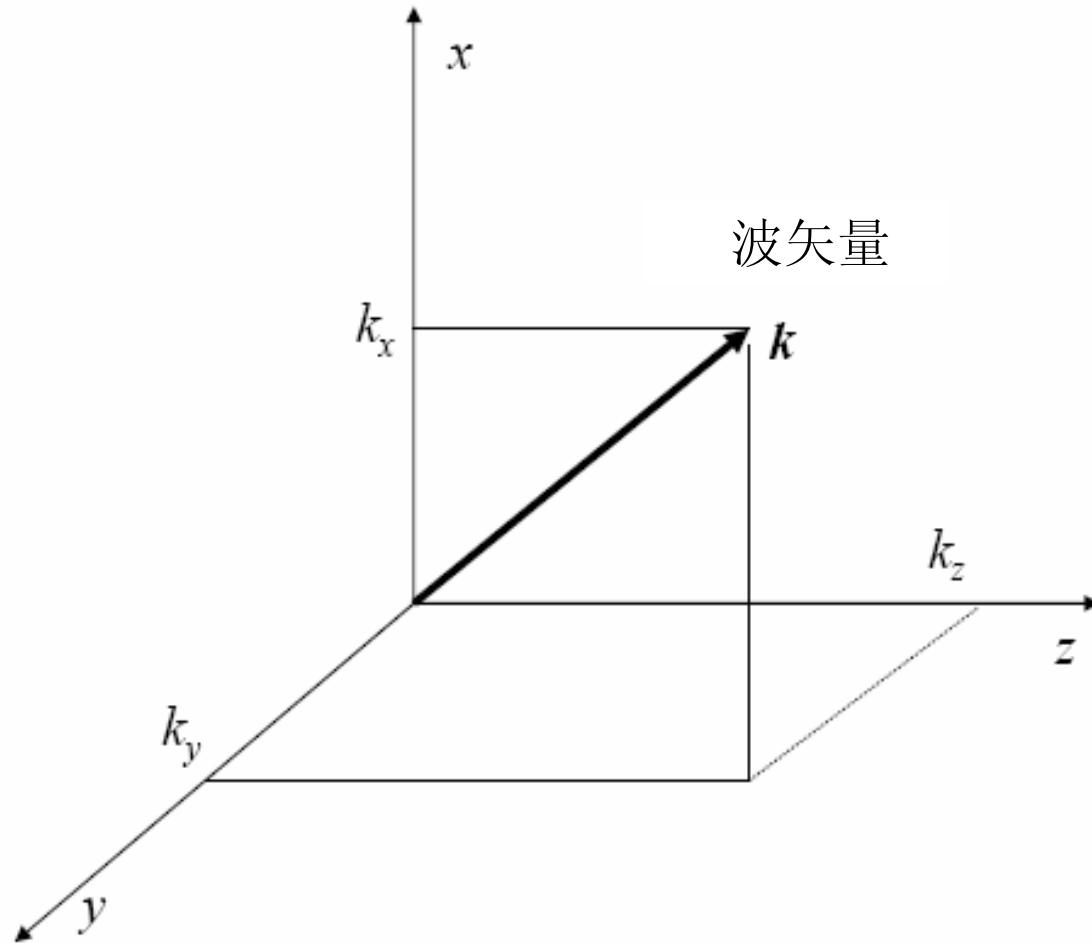
$$\hat{f}(x, y, z, t) = A e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t - \phi_0)} \quad \text{复数表示}$$

$$A e^{-i\phi(x, y, z)} \quad \text{复振幅或“相量”}$$

$$\text{其中 } \phi(x, y, z) \equiv k_x x + k_y y + k_z z - \phi_0$$

“波前” : 表面  $\phi(x, y, z) = \text{常数}$

# 平面波



# 平面波

$$a(\mathbf{r}) = A_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

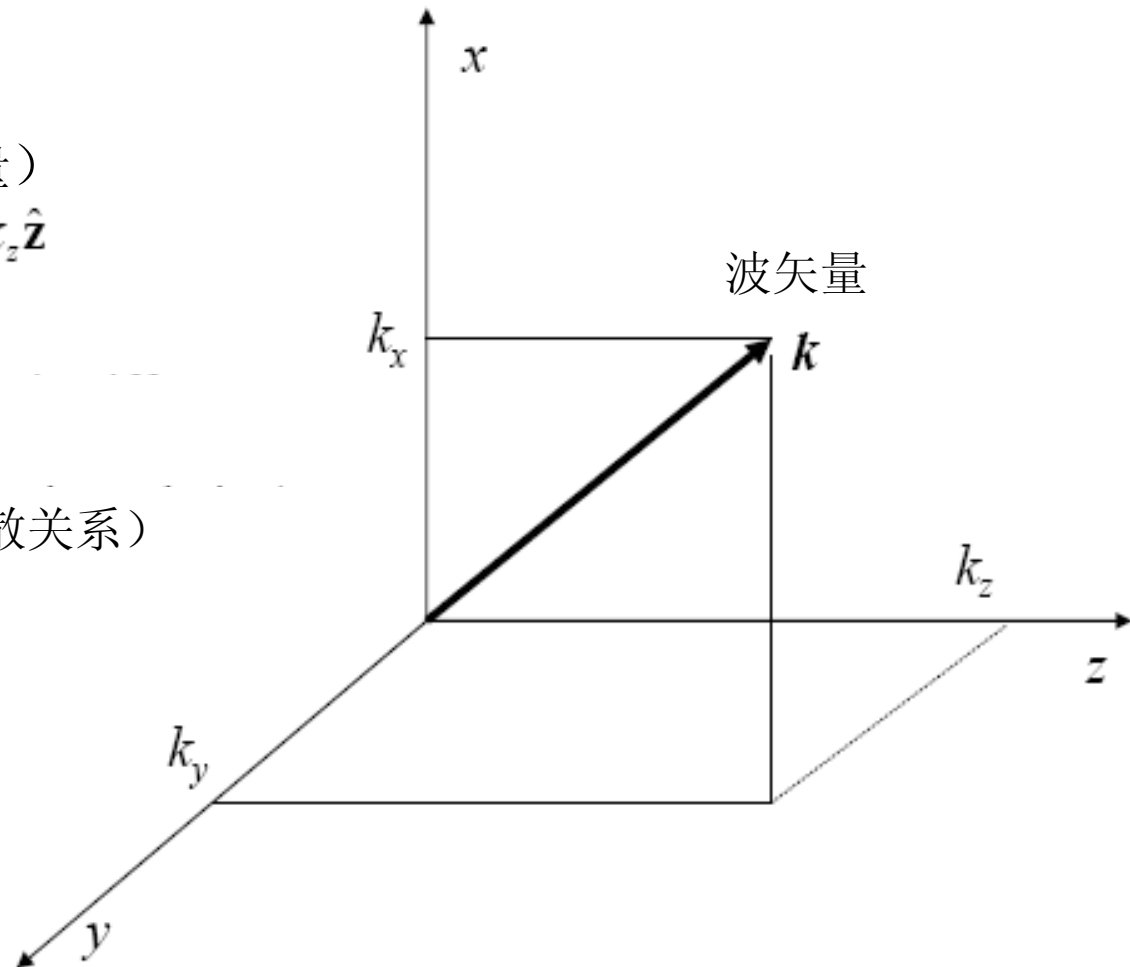
$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$

(笛卡尔坐标矢量)

$$\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}} + k_z\hat{\mathbf{z}}$$

解波方程, 仅当

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} \quad (\text{色散关系})$$





# 平面波

$$a(\mathbf{r}) = A_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$

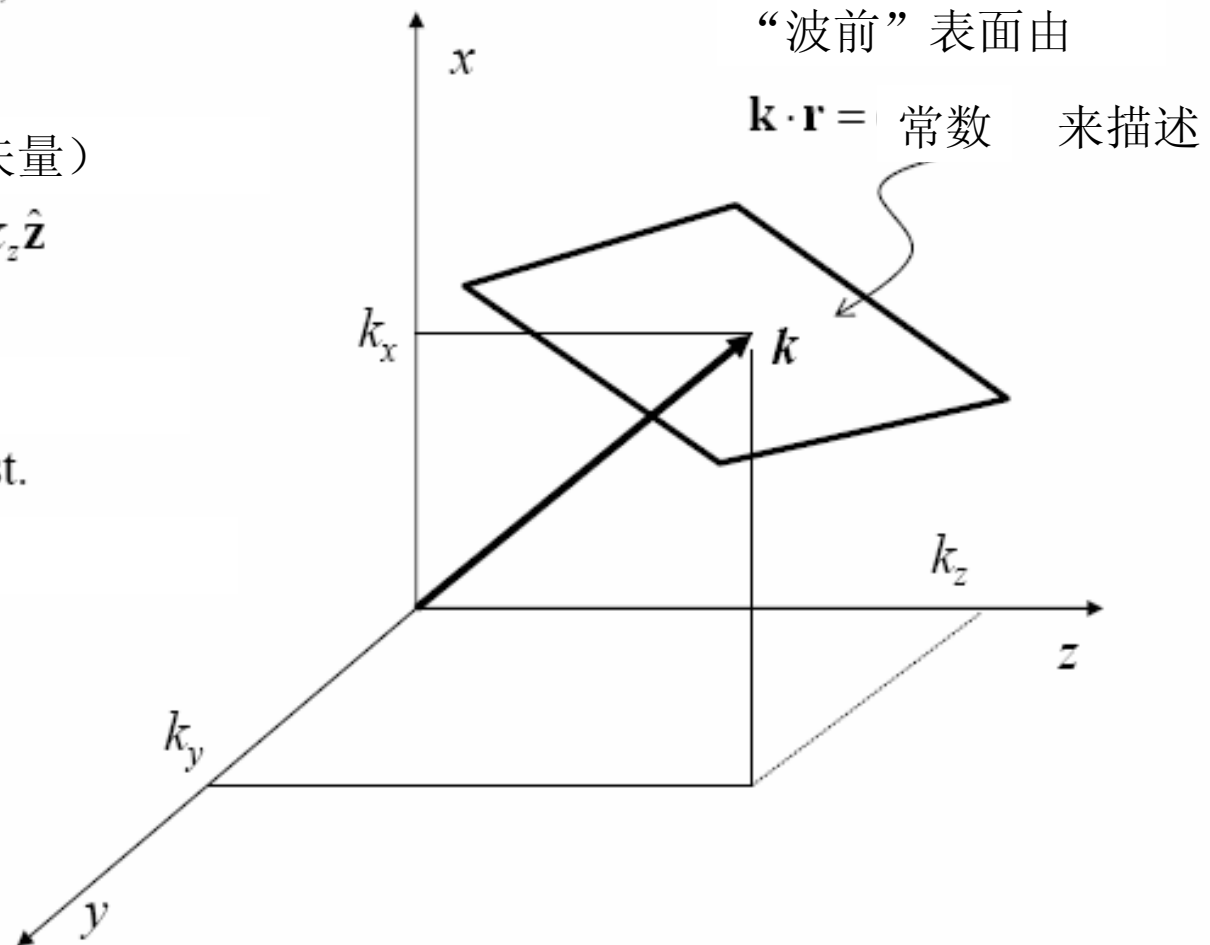
(笛卡尔坐标矢量)

$$\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}} + k_z\hat{\mathbf{z}}$$

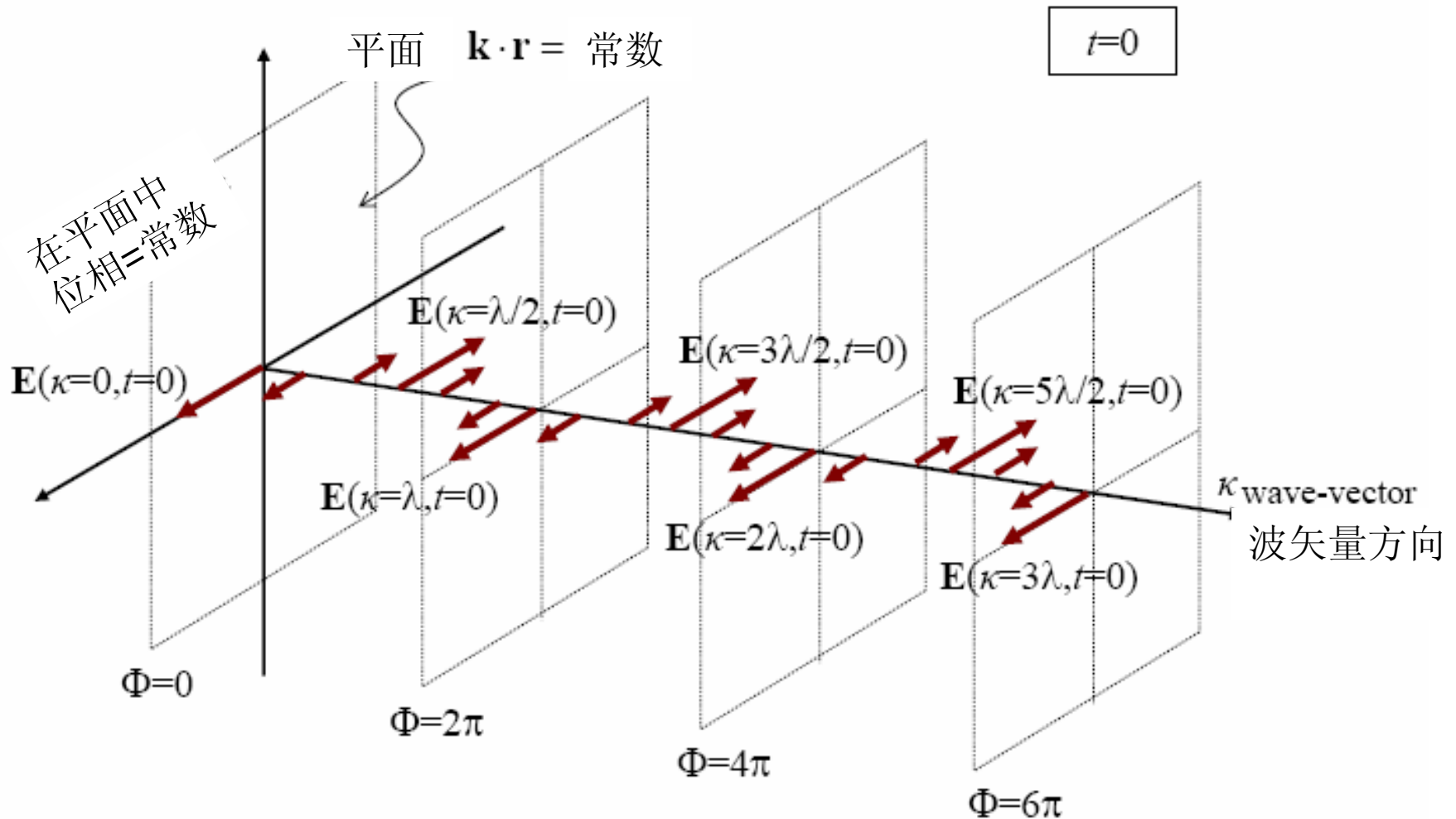
等位相条件:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{const.}$$

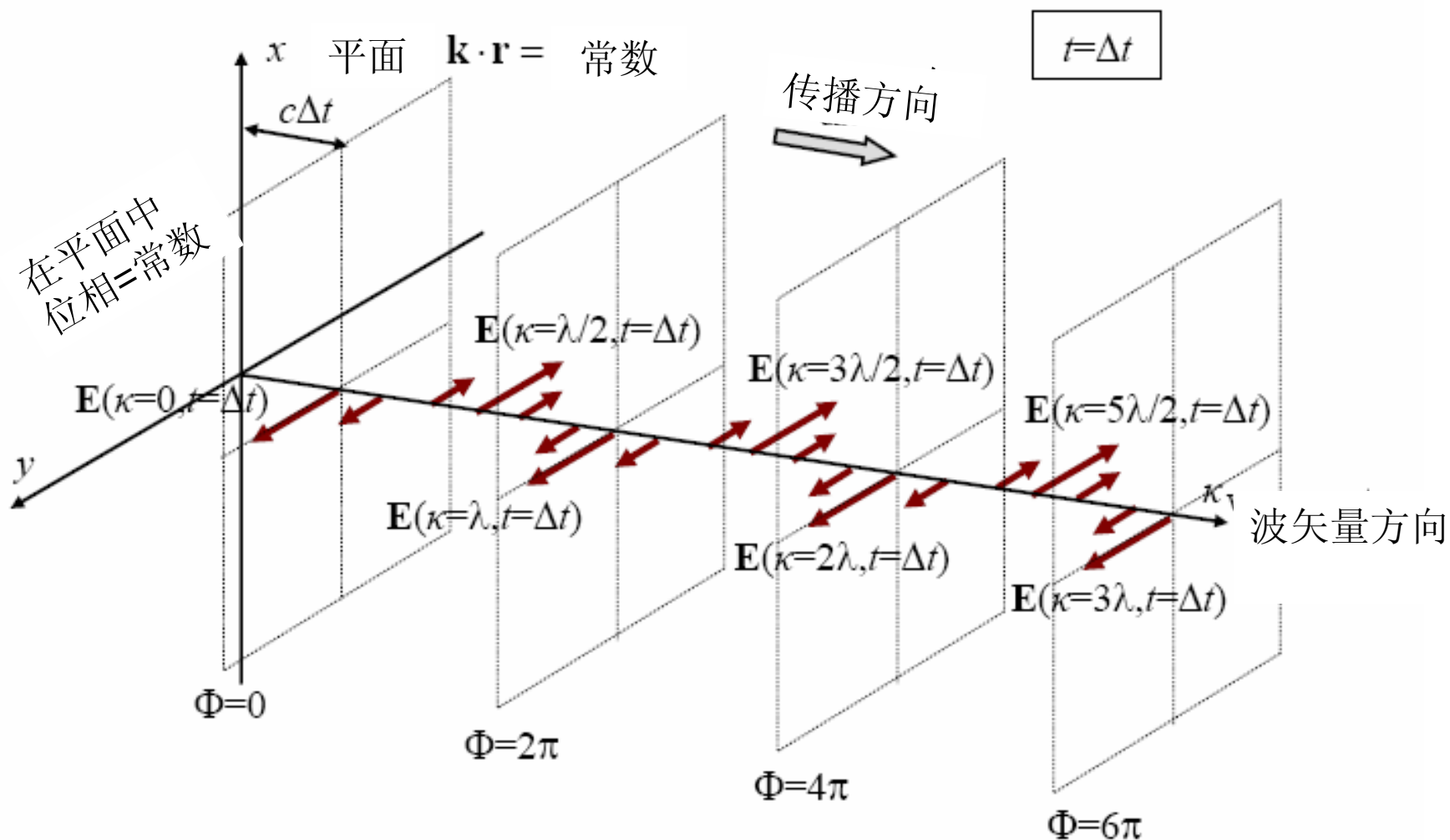
$\Rightarrow$  波前是平面



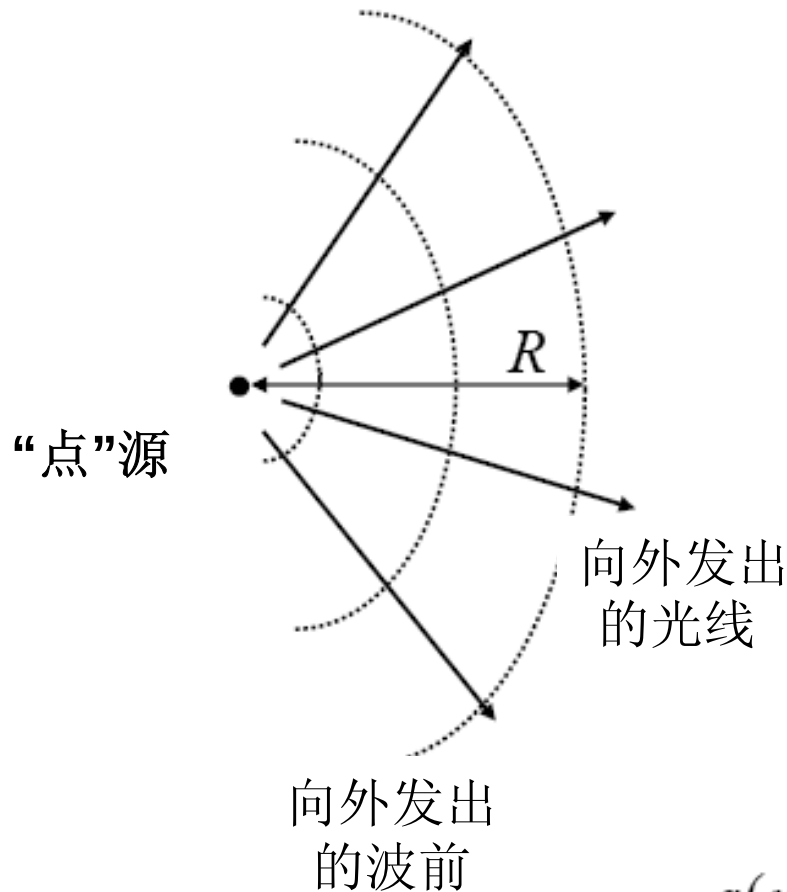
# 平面波的传播



# 平面波的传播



# 球面波



波前方程

$$kR - \omega t = \text{常数}$$



$$a(x, y, z, t) = A \frac{\cos(kR - \omega t + \pi/2)}{R}$$



指数表示

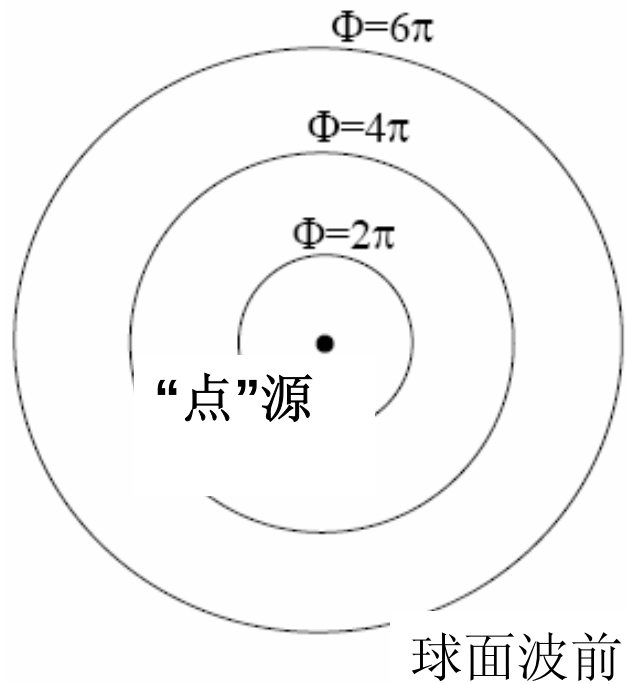
$$a(x, y, z, t) = A \frac{\exp\{i(kR - \omega t)\}}{iR}$$



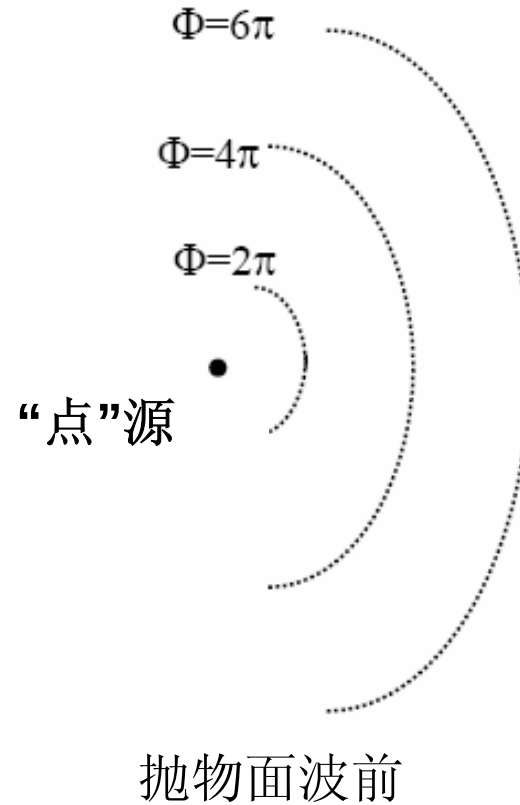
傍轴近似

$$a(x, y, z) = \frac{A}{iR} \exp\left\{i2\pi \frac{z}{\lambda} + i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}\right\}$$

# 球面波

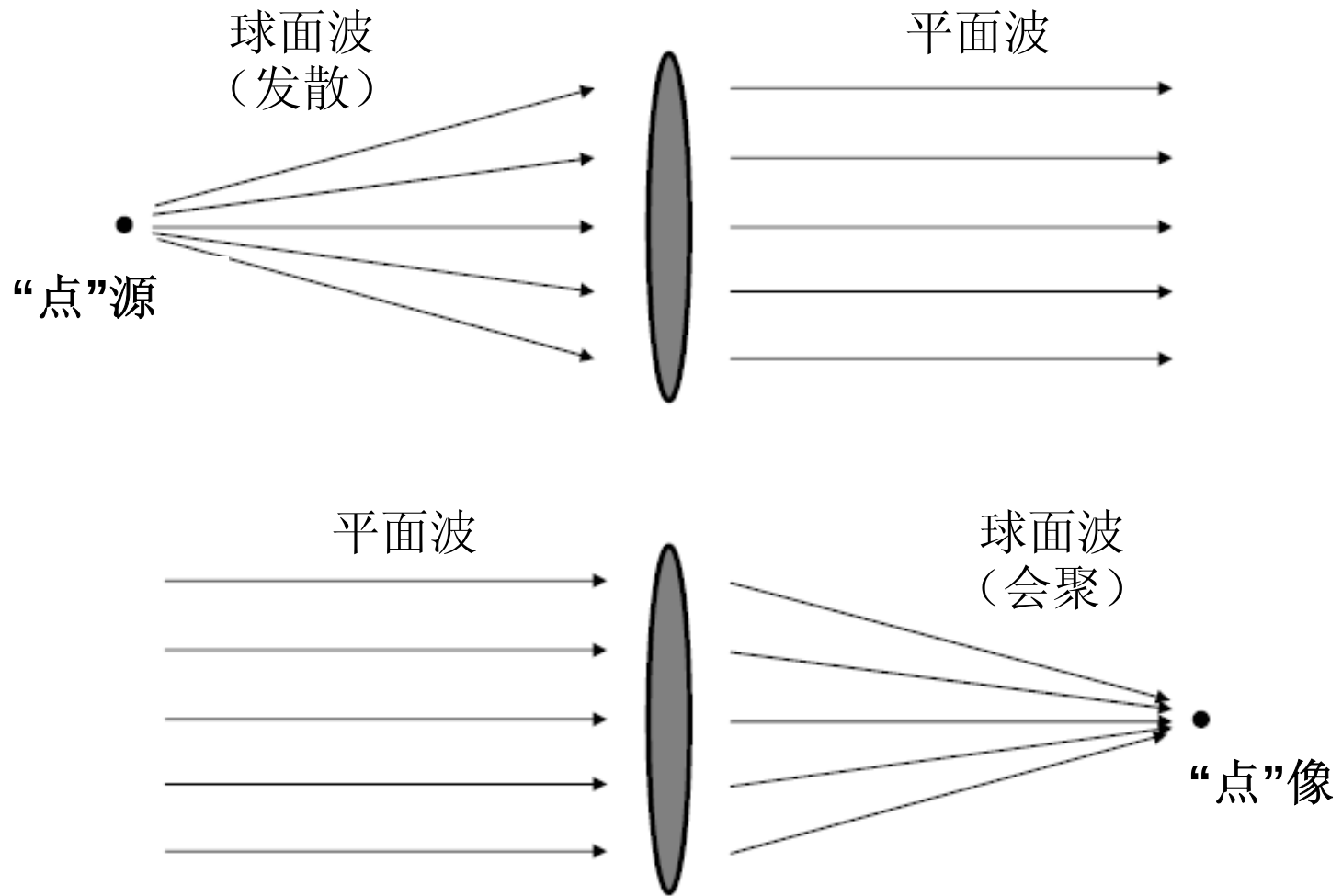


精确的



傍轴近似/高斯光束

# 透镜的作用



# 透镜的作用

