

# 今日概要

- 偏振
- 能量/坡印廷矢量
- 在介质分界面的反射和折射
  - 波动方法导出斯涅尔定律
  - 反射系数和透射系数
  - 复习全内反射(TIR)

# 偏 振

# 传播和偏振

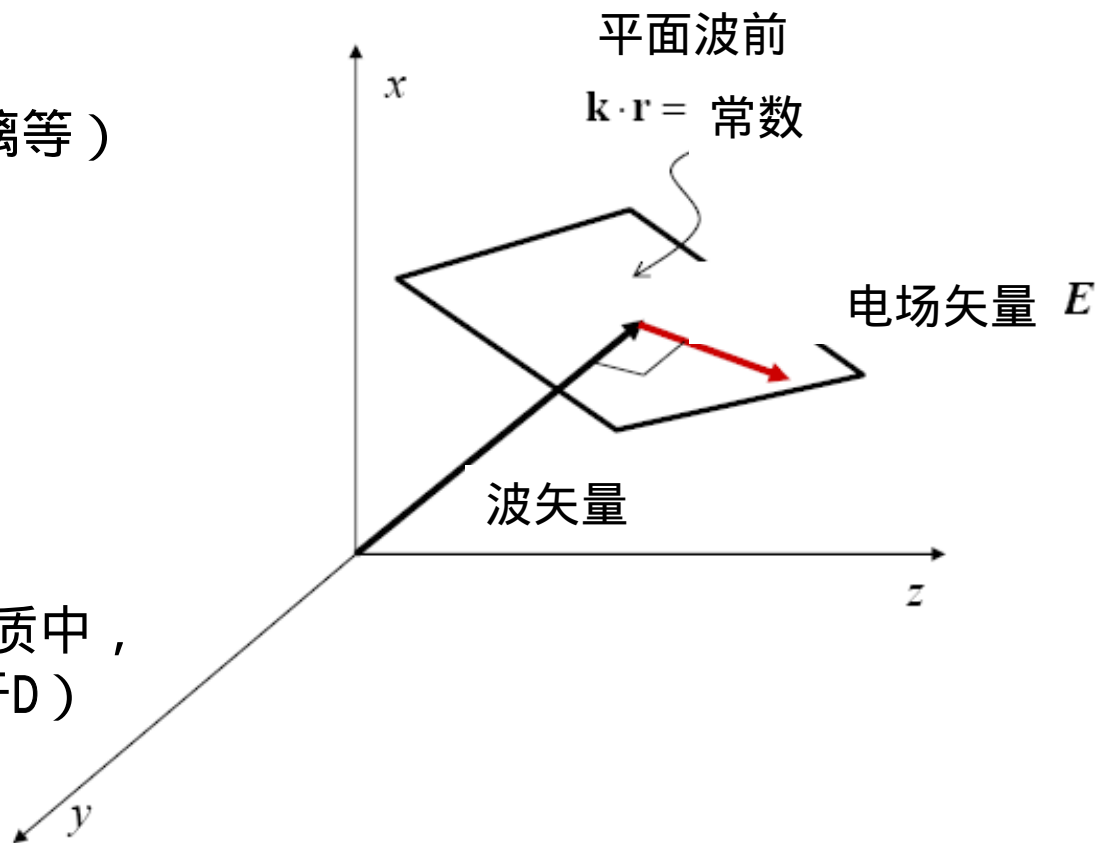
在各向同性介质中  
(如：自由空间，非晶玻璃等)

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$$

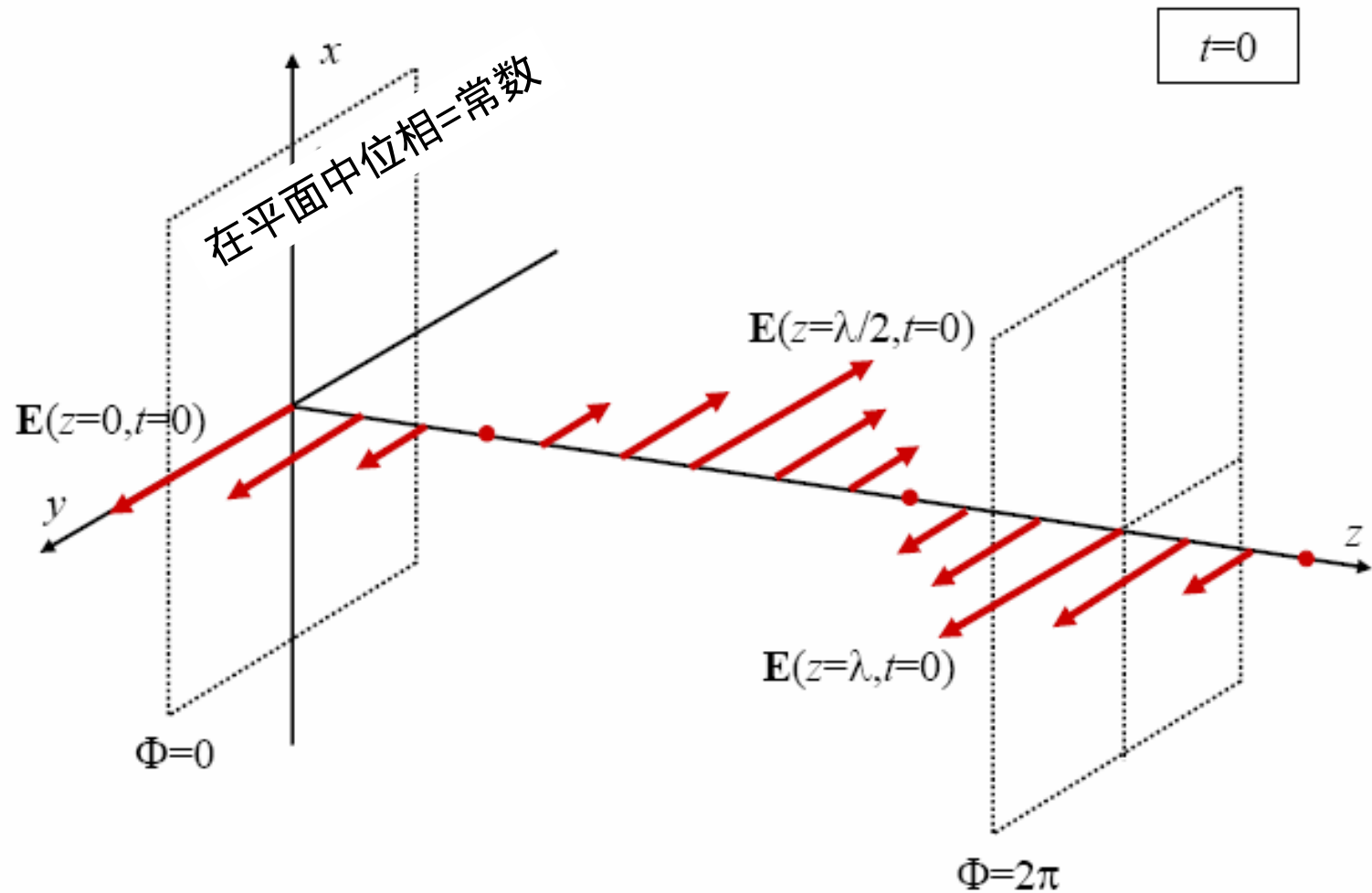
$$\text{i.e. } \mathbf{k} \perp \mathbf{E}$$

更普遍  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$

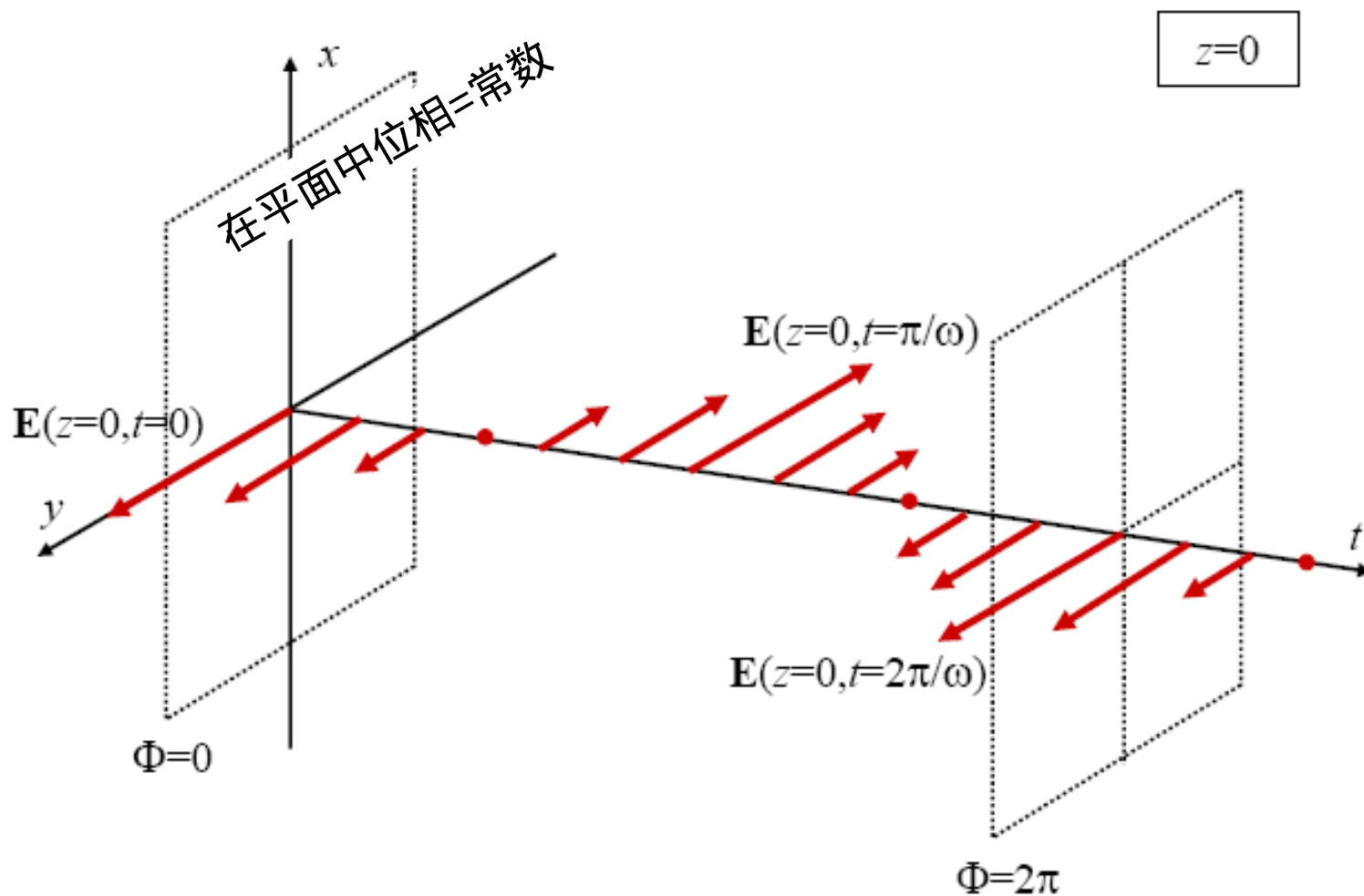
(提示：在各向异性介质中，  
如：晶体， $\mathbf{E}$ 不平行于 $\mathbf{D}$ )



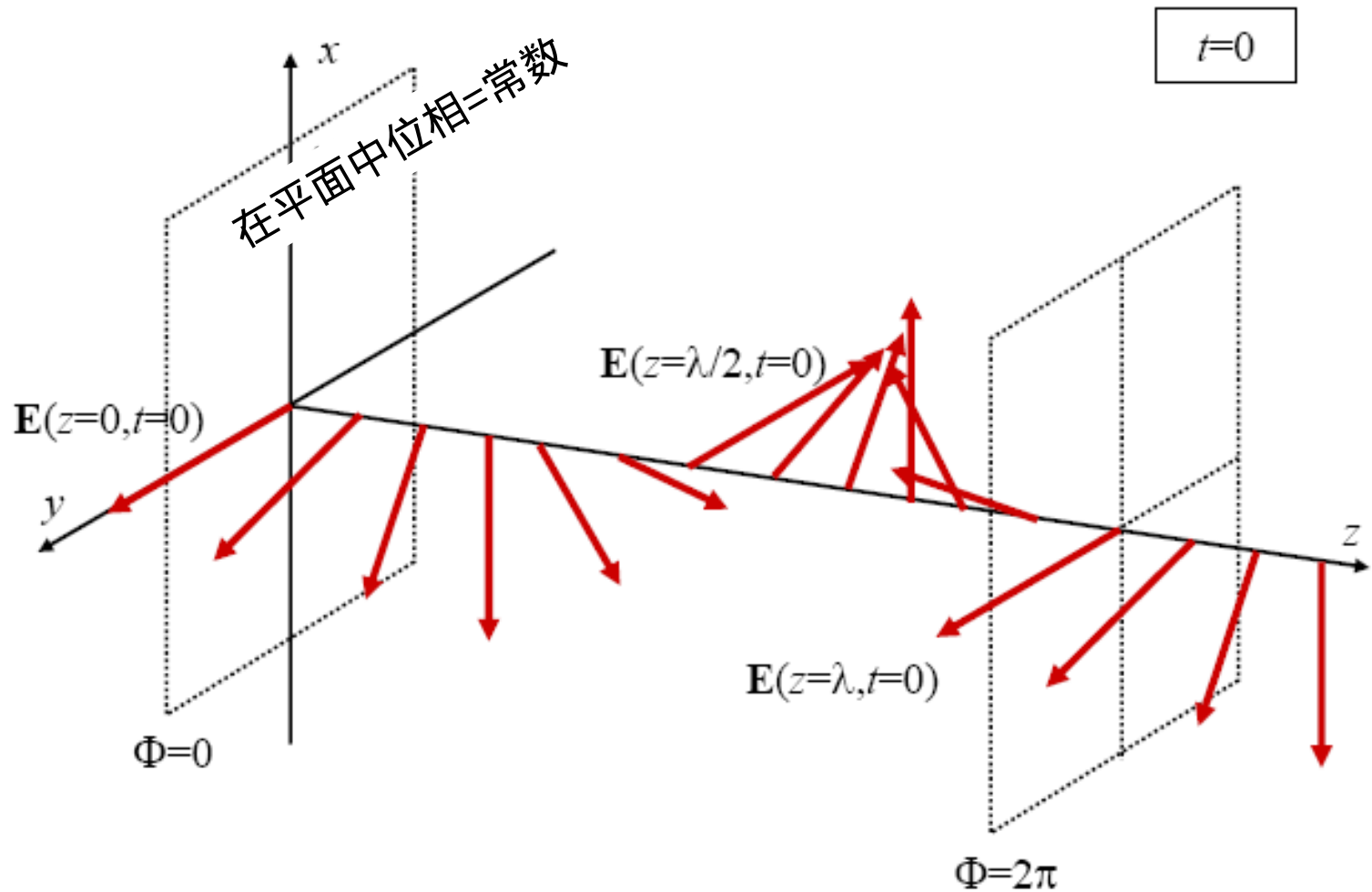
# 线偏振光（固定时刻）



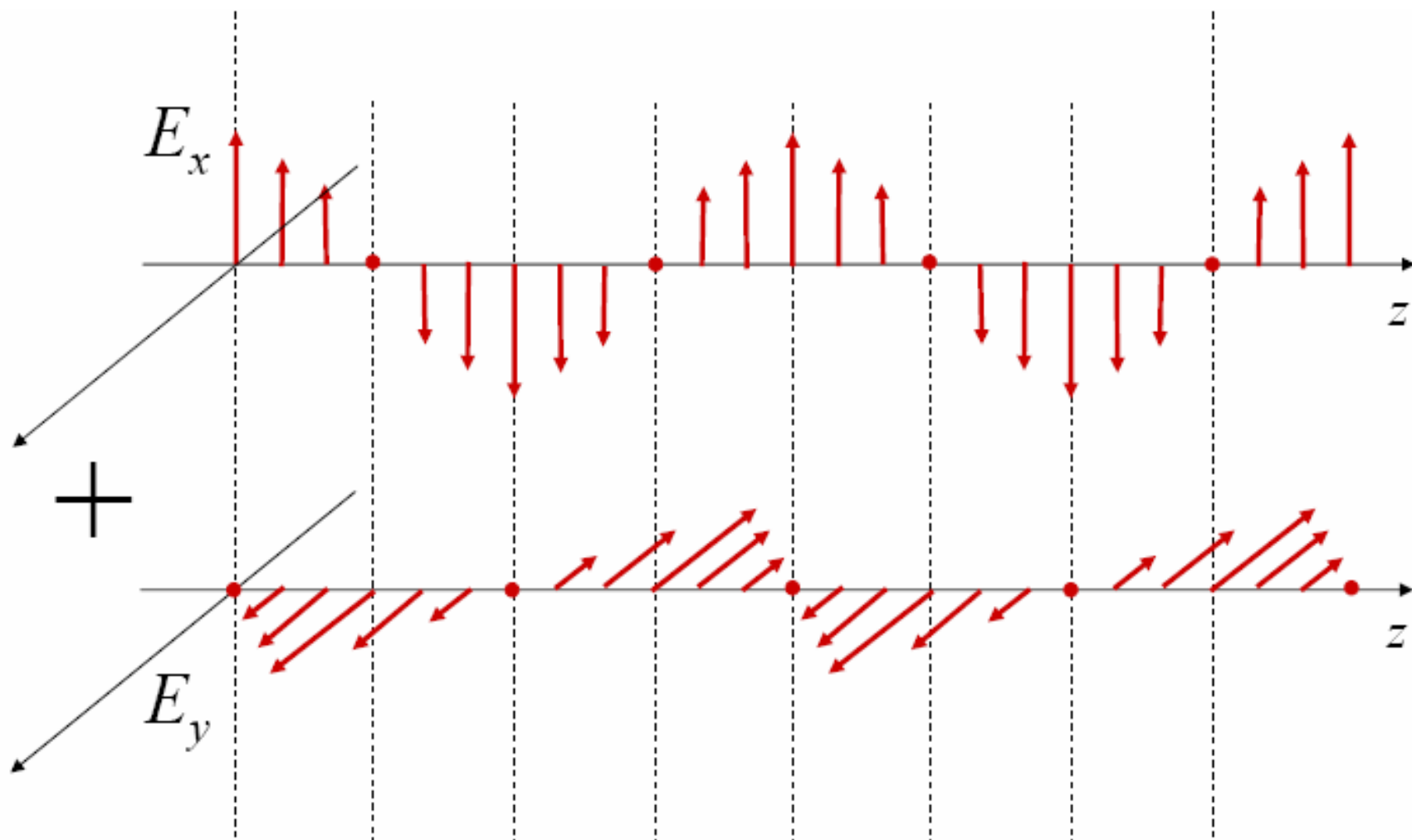
# 线偏振光（固定空间）



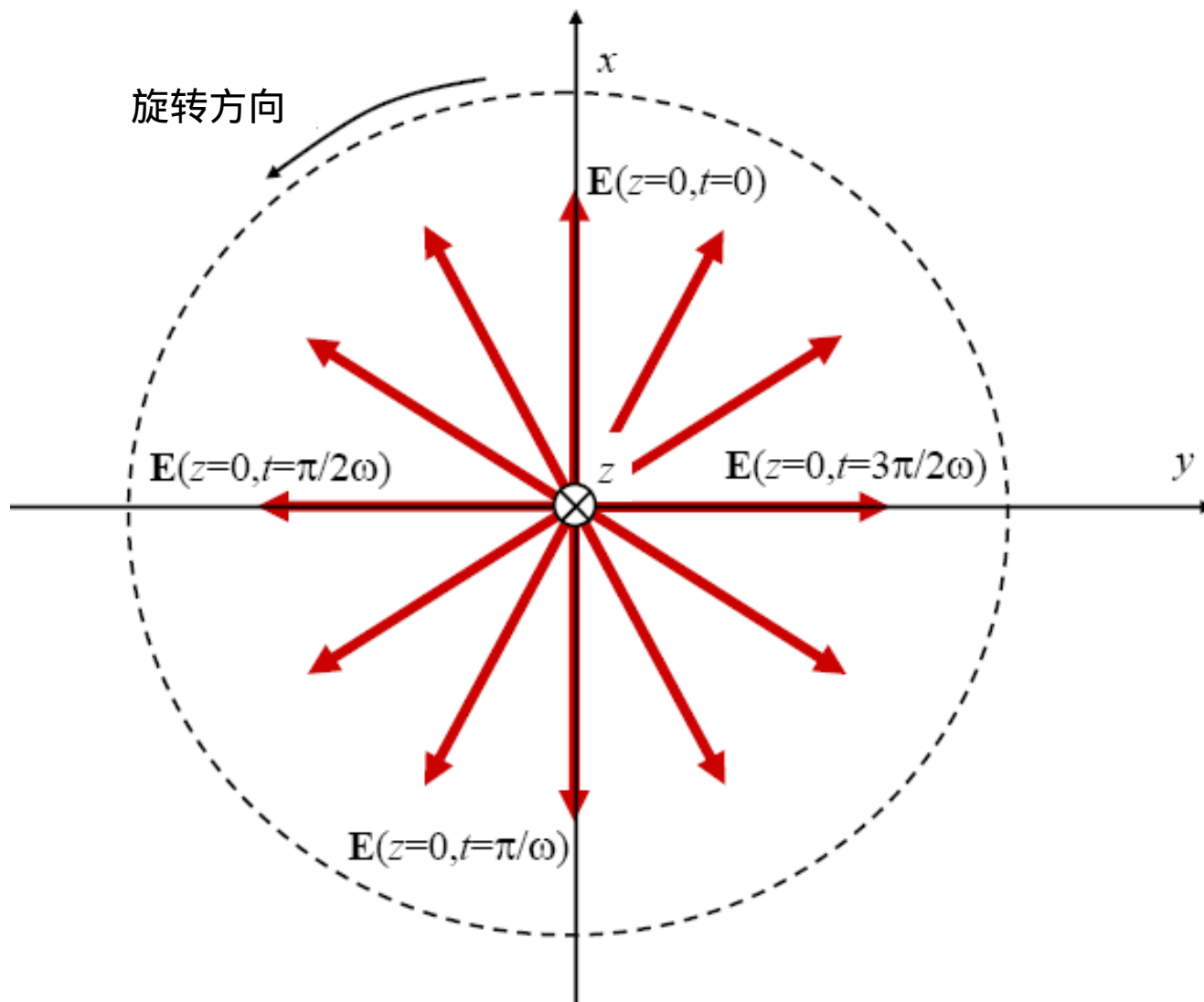
# 圆偏振光（固定时刻）



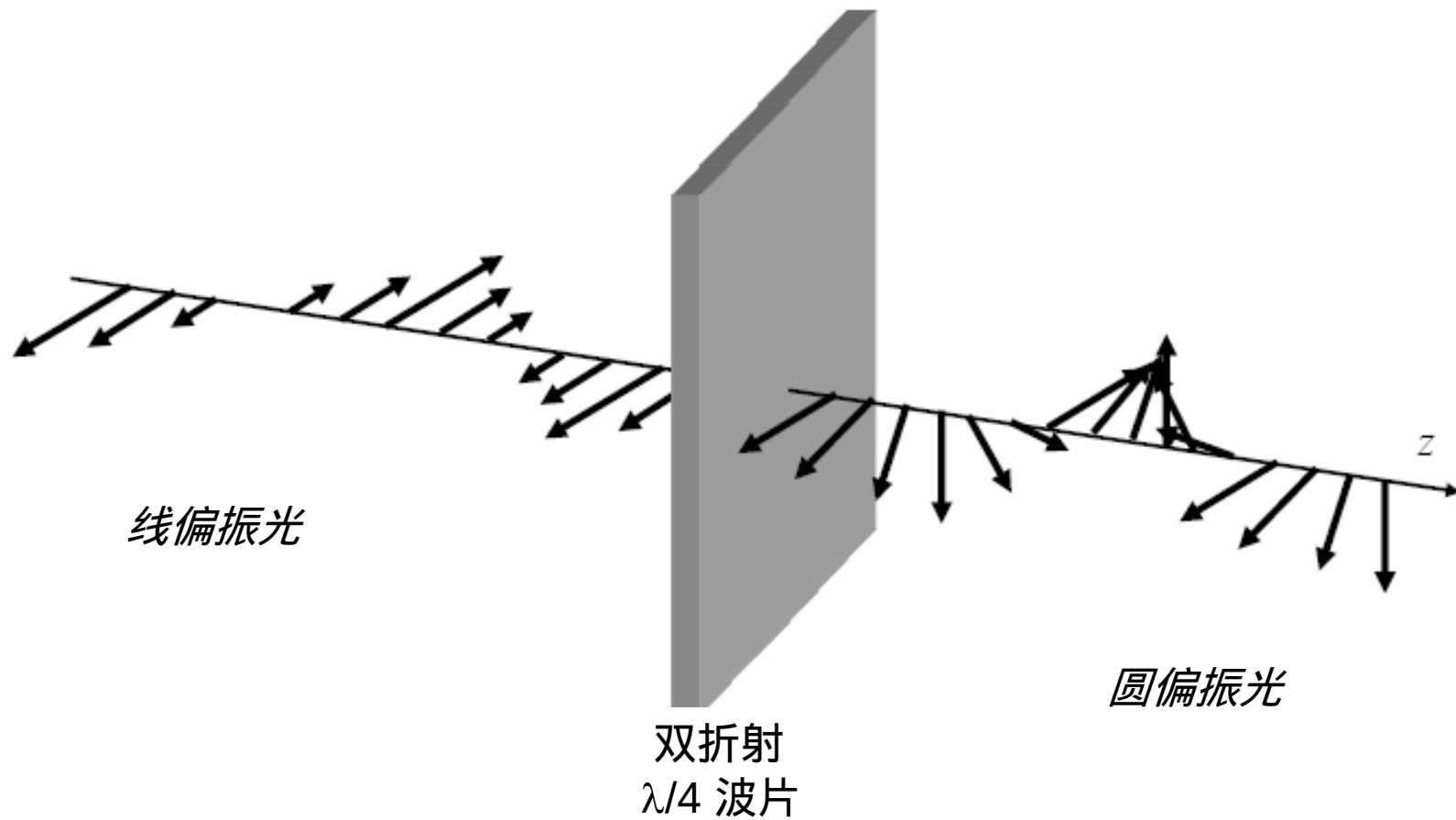
# 圆偏振光：线性成分



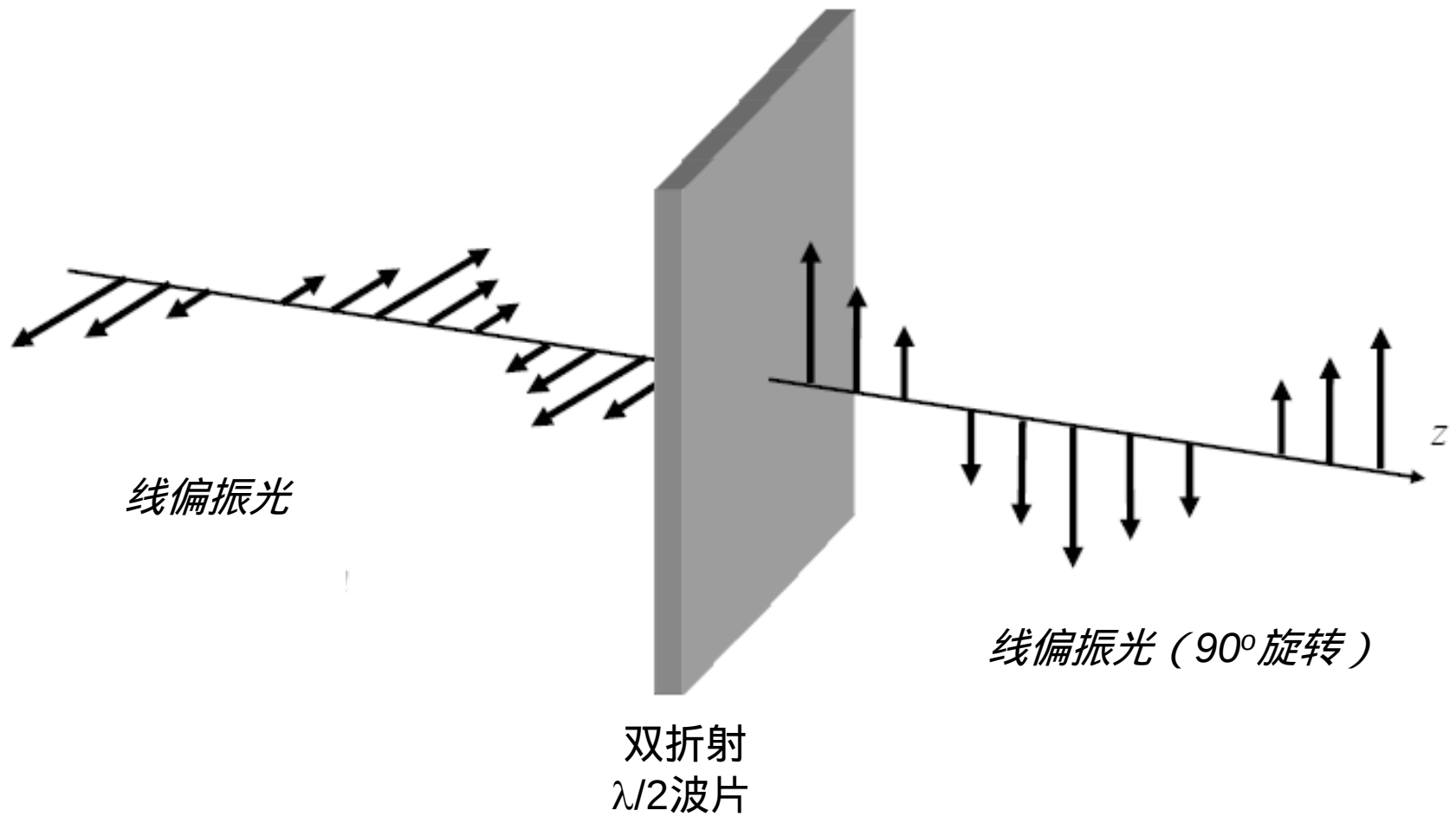
# 圆偏振光（固定空间）



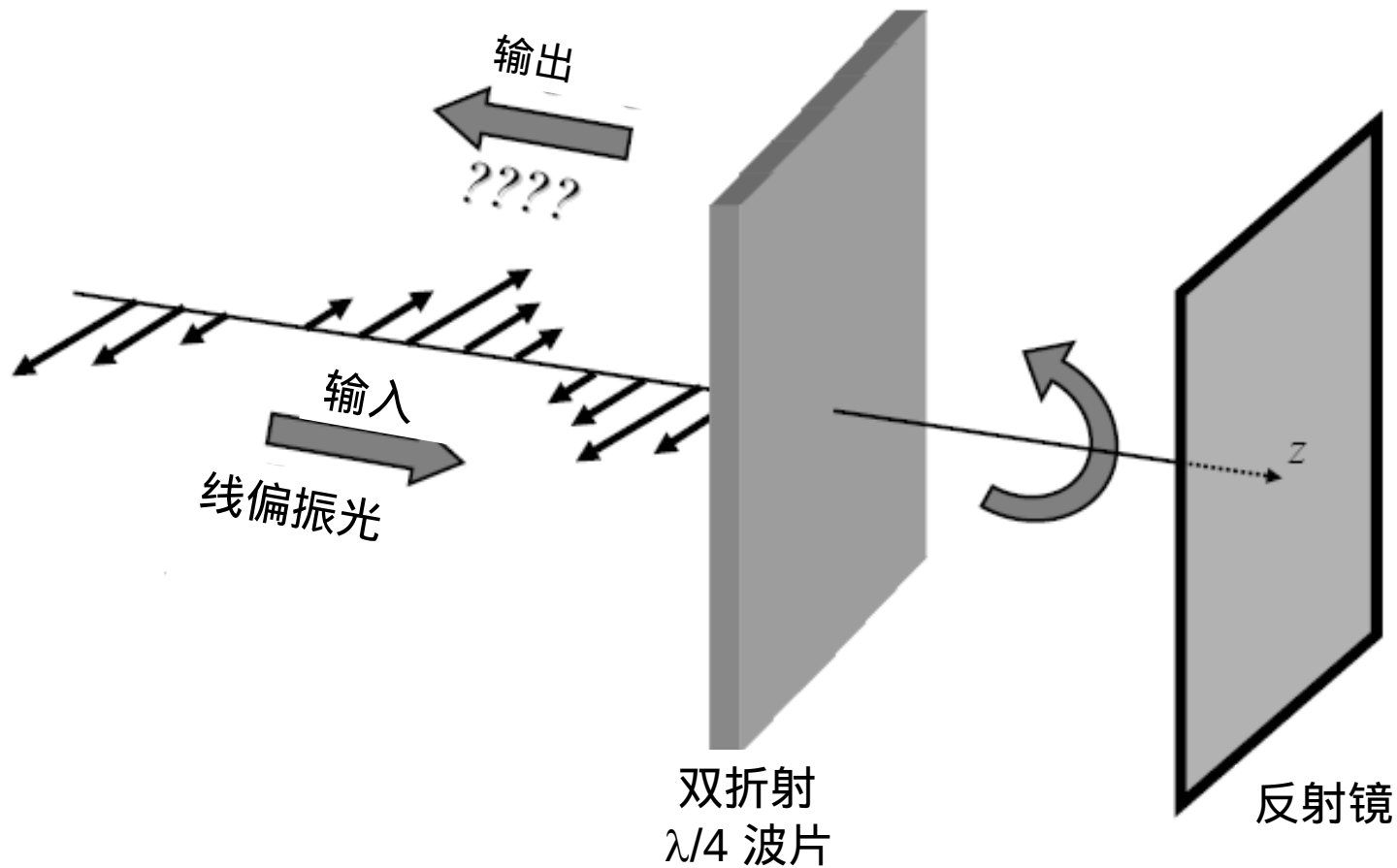
# $\lambda/4$ 波片



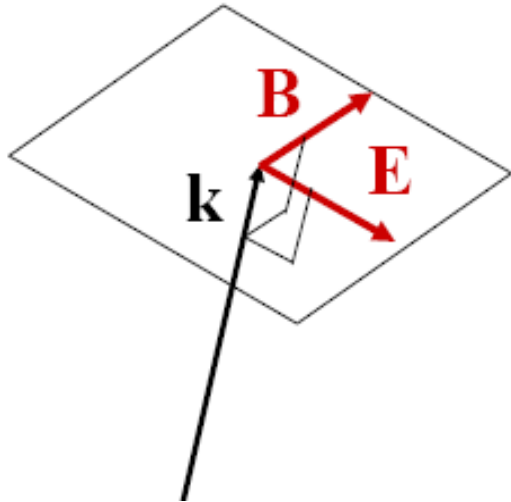
# $\lambda/2$ 波片



# 想一想



# E和B的关系



$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{其中} \quad \mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \equiv i\mathbf{k} \times \quad \text{和} \quad \frac{\partial}{\partial t} \equiv -i\omega$$

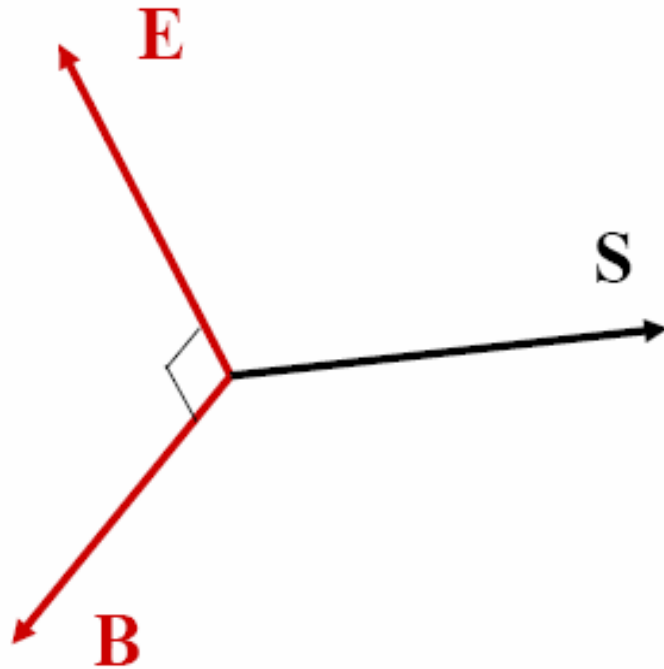
$$\Rightarrow \mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

矢量  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  构成右手系

注意：仅在自由空间或各向同性介质中成立

# 能 量

# 坡印廷矢量



$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = c^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

所以在自由空间

$$\mathbf{S} \parallel \mathbf{k}$$

$\mathbf{S}$  的单位为  $\text{W/m}^2$

所以 $\mathbf{S}$ 描述能量流  
( 每单位时间和单位面积内的能量 )

# 坡印廷矢量和相量 ( )

$$\mathbf{S} = c^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E} \Rightarrow \|\mathbf{B}\| = \frac{k}{\omega} \|\mathbf{E}\| = \frac{1}{c} \|\mathbf{E}\| \Rightarrow \|\mathbf{S}\| = c \varepsilon_0 \|\mathbf{E}\|^2$$

例，沿Z方向传播的正弦波

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} E_0 \cos(kz - \omega t) \Rightarrow \|\mathbf{S}\| = c \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)$$

复习：对可见光,  $\omega \sim 10^{14} - 10^{15} \text{Hz}$

# 坡印廷矢量和相量 ( )

复习：对可见光  $\omega \sim 10^{14} - 10^{15} \text{Hz}$

所以任何仪器记录的是能量流的 *平均值*

$$\langle \|S\| \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|S\| dt \quad \text{此时, } T \text{ 为周期} \quad (T = \lambda/c)$$

$\langle \|S\| \rangle$  叫做*照度*，即光场的*强度* (单位  $\text{W/m}^2$  )

# 坡印廷矢量和相量 ( )

例如，正弦电场

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}E_0 \cos(kz - \omega t) \Rightarrow \|\mathbf{S}\| = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)$$

于是，在常数距离  $z$ :

$$\langle \cos^2(kz - \omega t) \rangle = \int_t^{t+T} \cos^2(kz - \omega t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\langle \|\mathbf{S}\| \rangle = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2$$

# 坡印廷矢量和相量 ( )

复习相量表示：

$$f(z, t) = A \cos(kz - \omega t - \phi)$$

$$\hat{f}(z, t) = A \cos(kz - \omega t - \phi) + iA \sin(kz - \omega t - \phi)$$

复振幅或“相量”： $A e^{-i\phi}$

我们能否用相量计算强度？

# 坡印廷矢量和相量 ( )

考虑相同频率的两个场的叠加

$$E_1(z, t) = E_{10} \cos(kz - \omega t)$$

$$E_2(z, t) = E_{20} \cos(kz - \omega t - \phi)$$

$$\langle \|S\| \rangle = \frac{c\epsilon_0}{T} \int_t^{t+T} (E_1 + E_2)^2 dt = \dots = \frac{c\epsilon_0}{2} (E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos \phi)$$

现在考虑两个相应的相量

$$E_{10}$$

$$E_{20} e^{-i\phi}$$

及其相关的量

$$\frac{c\epsilon_0}{2} |E_{10} + E_{20} e^{-i\phi}|^2 = \dots = \frac{c\epsilon_0}{2} (E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos \phi)$$

# 坡印廷矢量和相量 ( )

考虑相同 频率的两个场的叠加

$$E_1(z, t) = E_{10} \cos(kz - \omega t)$$

$$E_2(z, t) = E_{20} \cos(kz - \omega t - \phi)$$

$$\langle \|S\| \rangle = \frac{c\epsilon_0}{T} \int_t^{t+T} (E_1 + E_2)^2 dt = \dots = \boxed{\frac{c\epsilon_0}{2} (E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos \phi)}$$

现在考虑两个相应的相量

$$E_{10}$$

$$E_{20} e^{-i\phi}$$

及其相关的量

$$\frac{c\epsilon_0}{2} |E_{10} + E_{20} e^{-i\phi}|^2 = \dots = \boxed{\frac{c\epsilon_0}{2} (E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos \phi)}$$

= !!

# 坡印廷矢量和照度

小结 （自由空间或各向同性介质）

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}; \quad \|\mathbf{S}\| = c\epsilon_0 \|\mathbf{E}\|^2 \quad \text{坡印廷矢量}$$

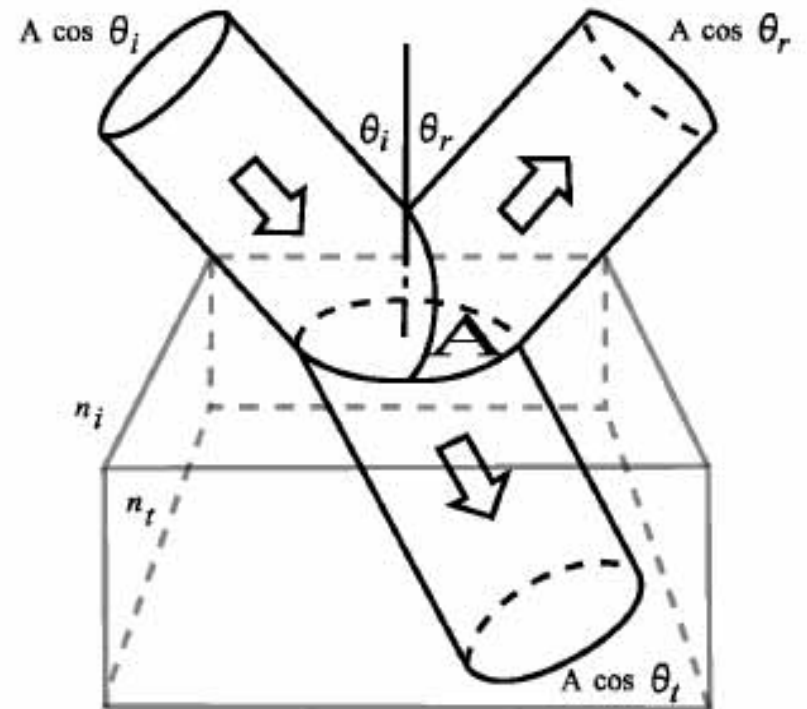
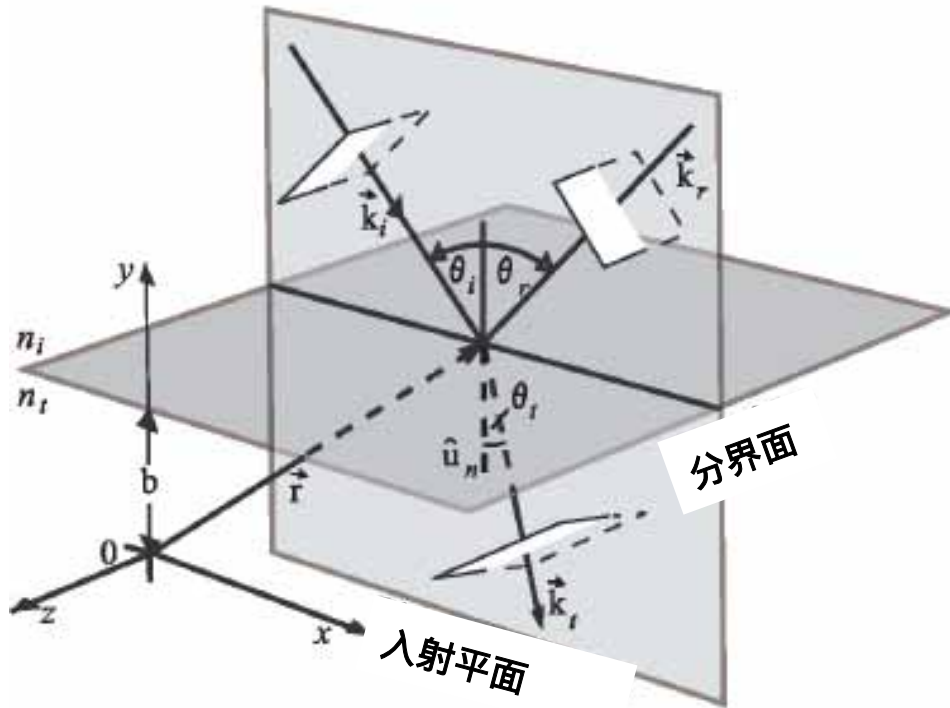
$$\langle \|\mathbf{S}\| \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|\mathbf{S}\| dt \quad \text{照度（或强度）}$$

$$\langle \|\mathbf{S}\| \rangle = \frac{c\epsilon_0}{2} |\text{相量}|^2 \quad \text{或} \quad \langle \|\mathbf{S}\| \rangle \propto |\text{相量}|^2$$

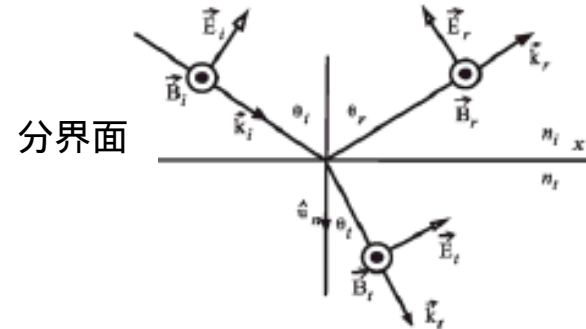
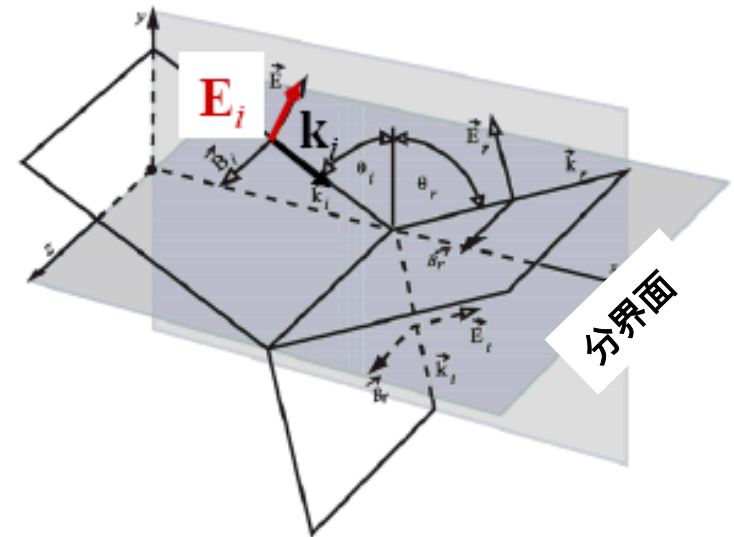
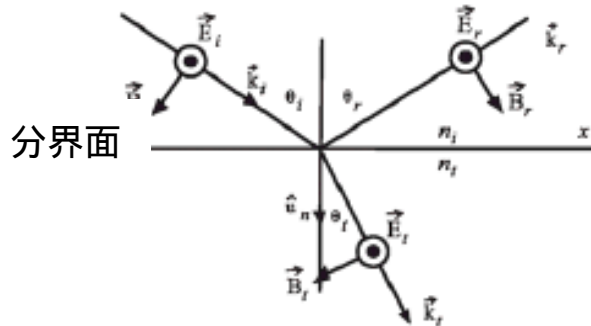
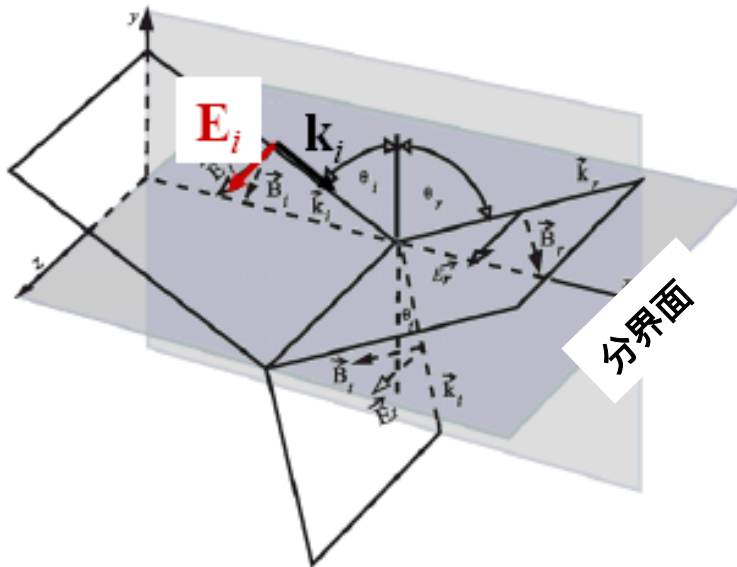
# 反射/折射

## 菲涅耳系数

# 在介质分界面的反射和透射

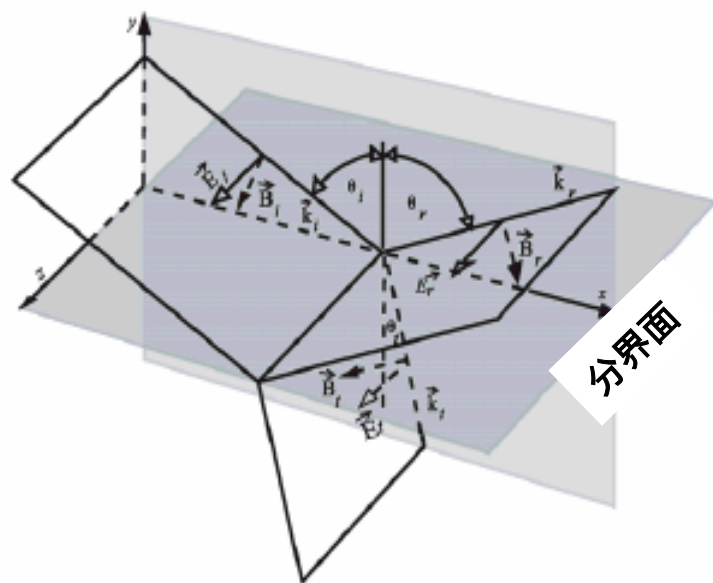


# 在介质分界面的反射和透射



# 在介质分界面的反射和透射

. 垂直于入射平面的偏振：



入射电场：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \hat{\mathbf{z}} E_{0i} \exp[i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = \\ &= \hat{\mathbf{z}} E_{0i} \exp[i(k_i(-y \cos \theta_i + x \sin \theta_i) - \omega t)] \end{aligned}$$

反射电场：

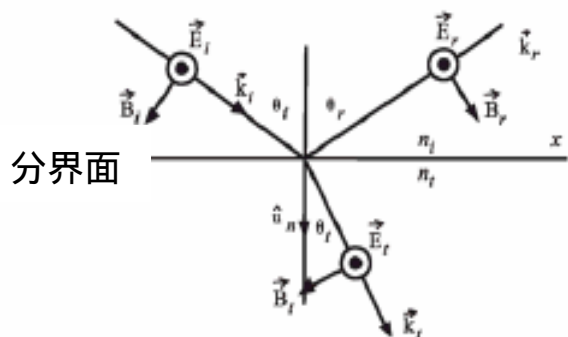
$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &= \hat{\mathbf{z}} E_{0r} \exp[i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = \\ &= \hat{\mathbf{z}} E_{0r} \exp[i(k_i(+y \cos \theta_r + x \sin \theta_r) - \omega t)] \end{aligned}$$

透射电场：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= \hat{\mathbf{z}} E_{0t} \exp[i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = \\ &= \hat{\mathbf{z}} E_{0t} \exp[i(k_t(-y \cos \theta_t + x \sin \theta_t) - \omega t)] \end{aligned}$$

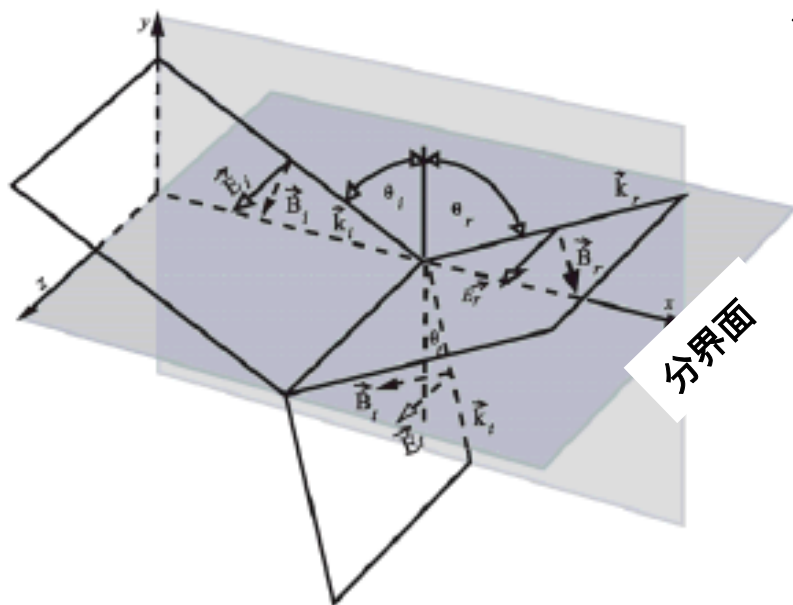
其中：

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{\lambda_{\text{vacuum}}}, \quad k_t = \frac{2\pi n_t}{\lambda_{\text{vacuum}}}$$



# 在介质分界面的反射和透射

. 垂直于入射平面的偏振：



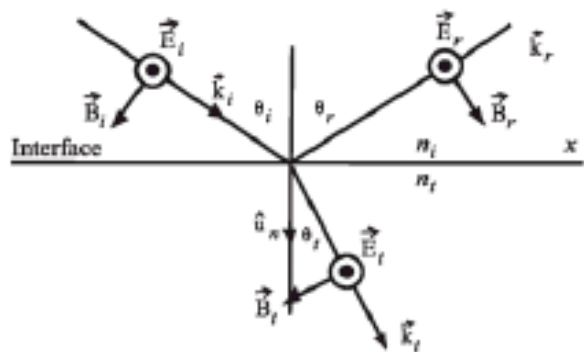
在分界面电场的切线方向是连续的：

$$E_i(\text{切向}) + E_r(\text{切向}) = E_t(\text{切向})$$

$$\Rightarrow E_{0i} \exp[i(k_i(-y \cos \theta_i + x \sin \theta_i) - \omega t)] + E_{0r} \exp[i(k_i(+y \cos \theta_r + x \sin \theta_r) - \omega t)] = E_{0t} \exp[i(k_t(-y \cos \theta_t + x \sin \theta_t) - \omega t)]$$

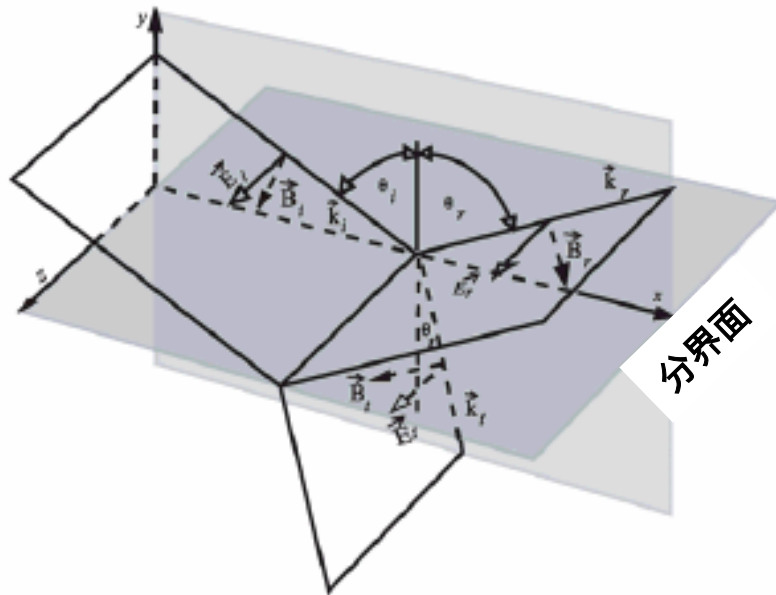
但是在分界面： $y=0$  所以

$$E_{0i} \exp[i(k_i x \sin \theta_i - \omega t)] + E_{0r} \exp[i(k_i x \sin \theta_r - \omega t)] = E_{0t} \exp[i(k_t x \sin \theta_t - \omega t)]$$



# 在介质分界面的反射和透射

. 垂直于入射平面的偏振：



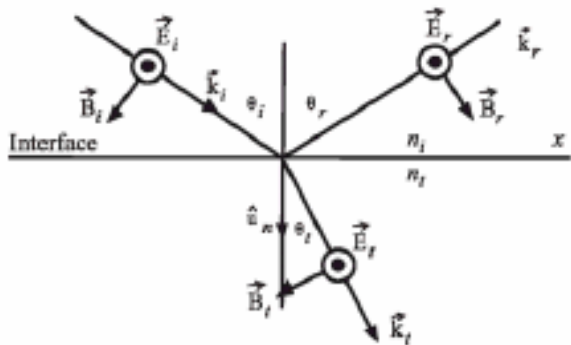
在分界面电场的切线方向是连续的：

$$E_{0i} \exp[i(k_i x \sin \theta_i - \cancel{e} t)] + E_{0r} \exp[i(k_i x \sin \theta_r - \cancel{e} t)] = E_{0t} \exp[i(k_t x \sin \theta_t - \cancel{e} t)]$$

因为对所有的 $x$ , 指数必须是相等的, 所以我们得到

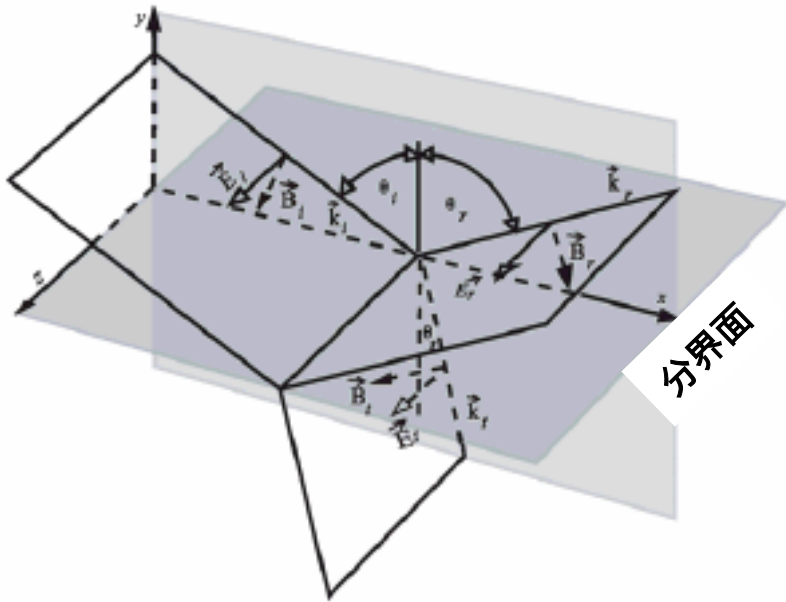
$$\theta_i = \theta_r \quad \text{并且}$$

$$k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t \Leftrightarrow \frac{2\pi n_i}{\lambda_{\text{vacuum}}} \sin \theta_i = \frac{2\pi n_t}{\lambda_{\text{vacuum}}} \sin \theta_t$$



# 在介质分界面的反射和透射

. 垂直于入射平面的偏振：



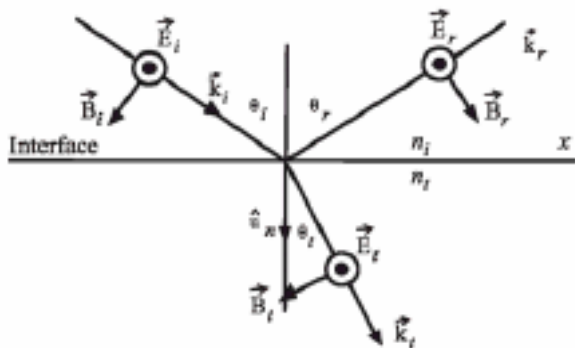
在分界面电场的切线方向是连续的：

$$\theta_i = \theta_r$$

反射定律

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$$

斯涅尔折射定律

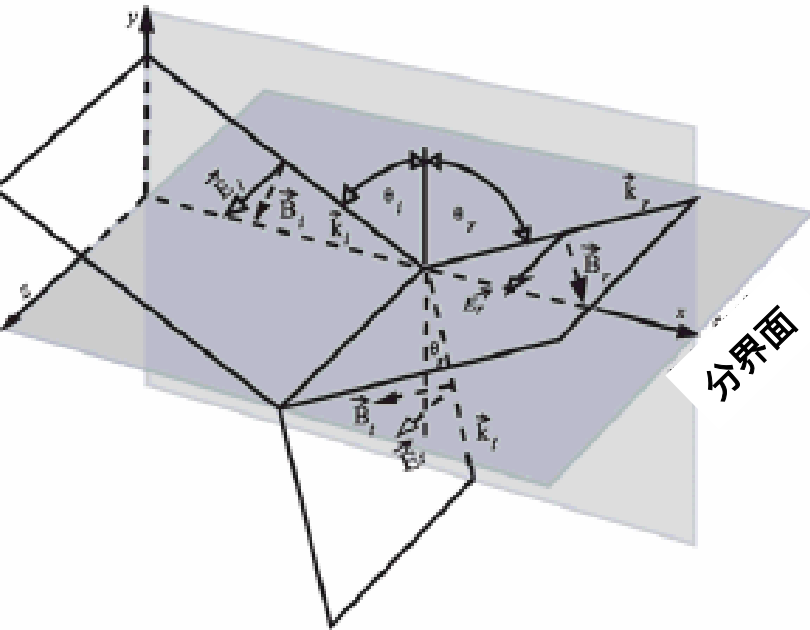


所以波动方法的描述与费马原理是等同的！！



# 在介质分界面的反射和透射

. 垂直于入射平面的偏振：



入射电场

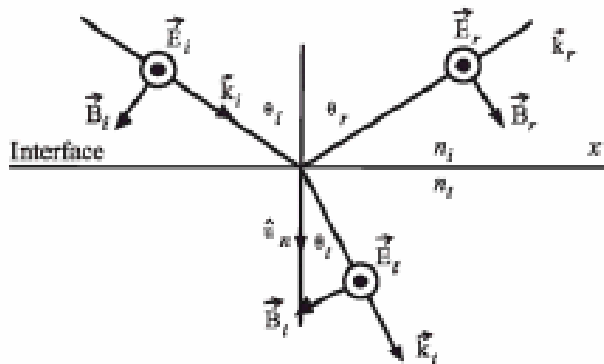
$$\mathbf{E}_i = \hat{\mathbf{z}} E_{0i} \exp[i(k_i(-y \cos \theta_i + x \sin \theta_i) - \omega t)]$$

反射电场

$$\mathbf{E}_r = \hat{\mathbf{z}} E_{0r} \exp[i(k_i(+y \cos \theta_r + x \sin \theta_r) - \omega t)]$$

透射电场

$$\mathbf{E}_t = \hat{\mathbf{z}} E_{0t} \exp[i(k_t(-y \cos \theta_t + x \sin \theta_t) - \omega t)]$$

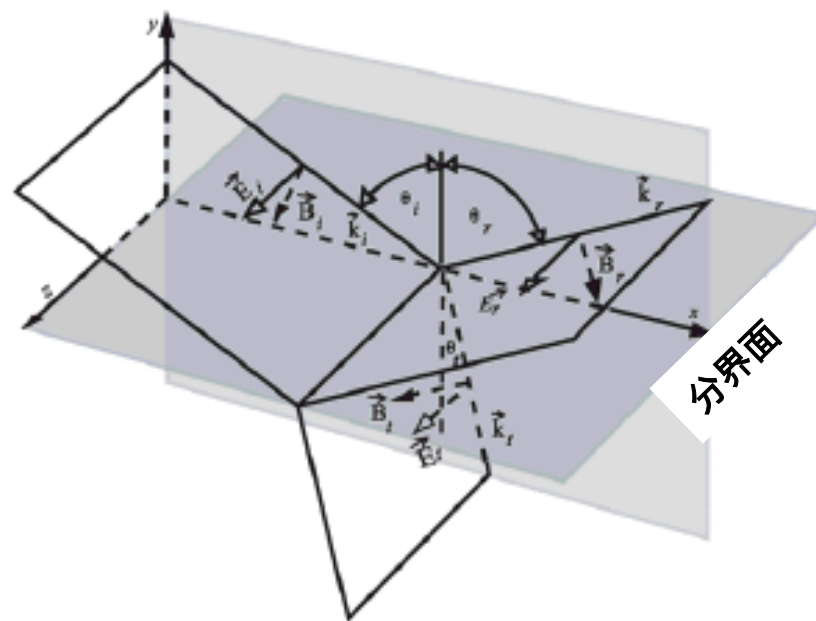


需要计算反射振幅和透射振幅  $E_{0r}$ ,  $E_{0t}$

即，需要两个方程

# 在介质分界面的反射和透射

. 垂直于入射平面的偏振：

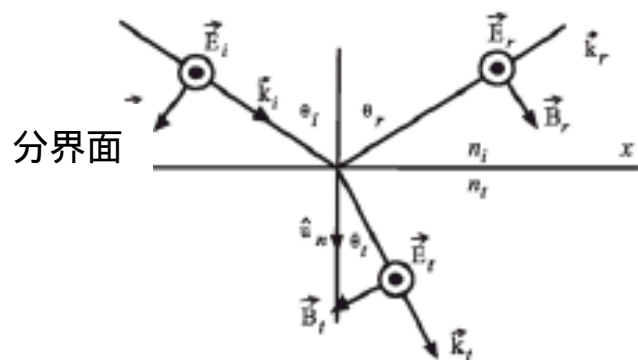


在分界面电场的切线方向是连续的  
因此给了我们一个方程：

$$E_{0i} \exp[i(k_i x \sin \theta_i - \omega t)] + E_{0r} \exp[i(k_i x \sin \theta_r - \omega t)] = E_{0t} \exp[i(k_t x \sin \theta_t - \omega t)]$$

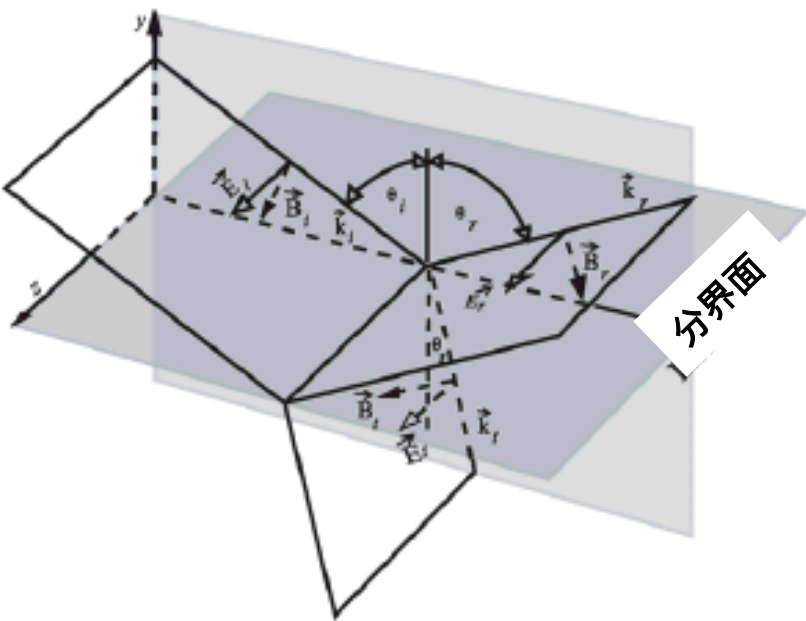
该式满足斯涅尔定律，于是变成

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$$



# 在介质分界面的反射和透射

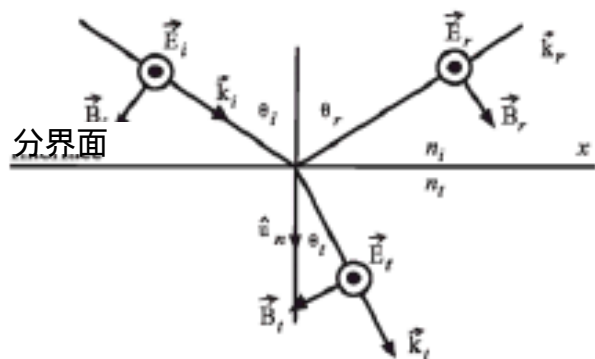
. 垂直于入射平面的偏振：



第二个方程来自于在分界面磁场的切线方向是连续的：

$$B_i(\text{切向}) + B_r(\text{切向}) = B_t(\text{切向})$$

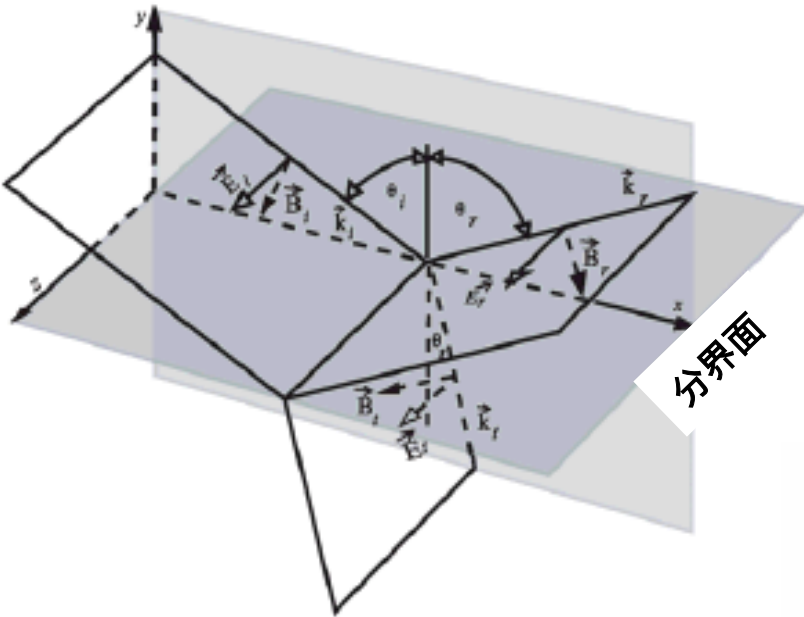
复习  $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$



$$= \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ k \sin \theta & k \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & E_0 \end{vmatrix}$$

# 在介质分界面的反射和透射

. 垂直于入射平面的偏振：

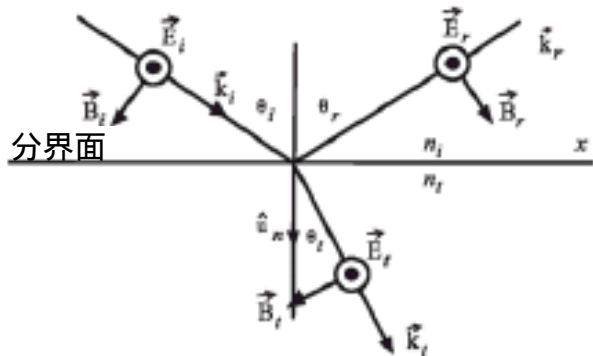


因为在分界面磁场的切线方向是连续的,

$B_x$  在界面  $y=0$  变成

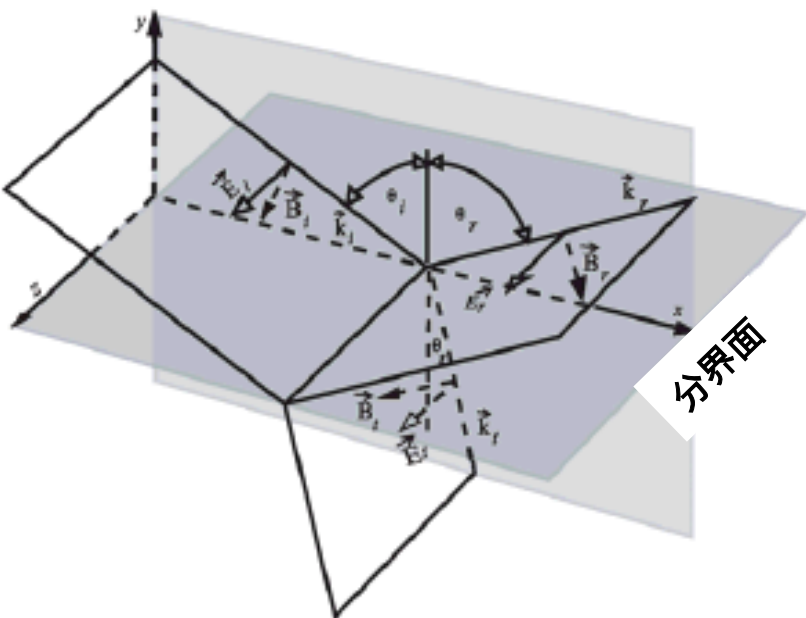
$$k_i E_{0i} \cos \theta_i - k_i E_{0r} \cos \theta_r = k_t E_{0t} \cos \theta_t \Leftrightarrow$$

$$n_i E_{0i} \cos \theta_i - n_i E_{0r} \cos \theta_r = n_t E_{0t} \cos \theta_t$$



# 在介质分界面的反射和透射

. 垂直于入射平面的偏振：



解2X2方程组

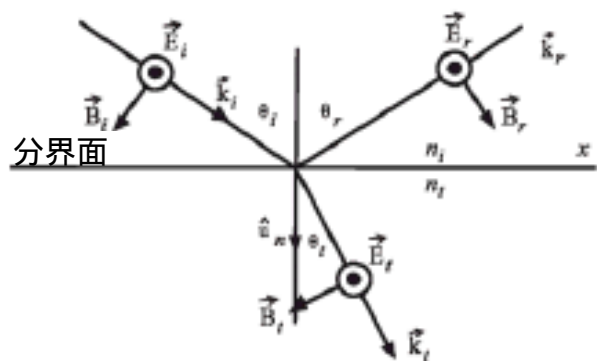
$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$$

$$n_i E_{0i} \cos \theta_i - n_i E_{0r} \cos \theta_r = n_t E_{0t} \cos \theta_t$$

我们最终得到

$$r_{\perp} = \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

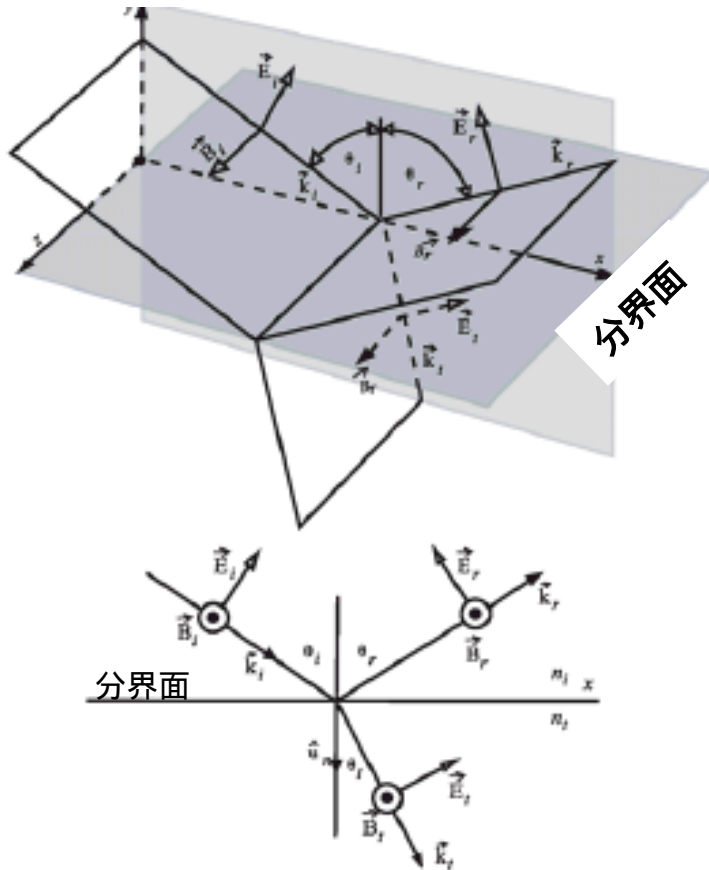
$$t_{\perp} = \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$



# 在介质分界面的反射和透射

· 平行于入射平面的偏振：

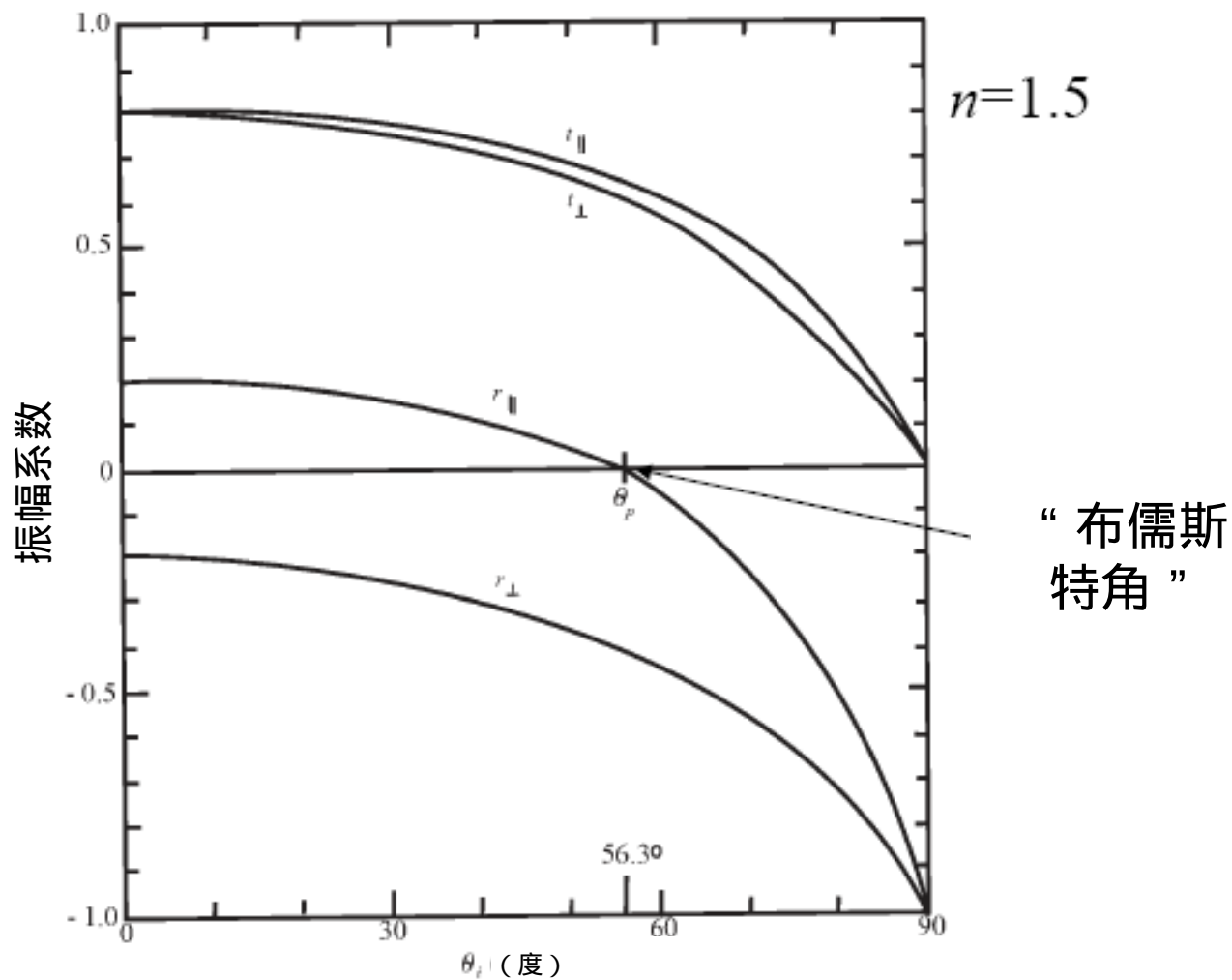
根据类似的推导过程



$$r_{\parallel} = \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}$$

$$t_{\parallel} = \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}$$

# 在介质分界面的反射和透射

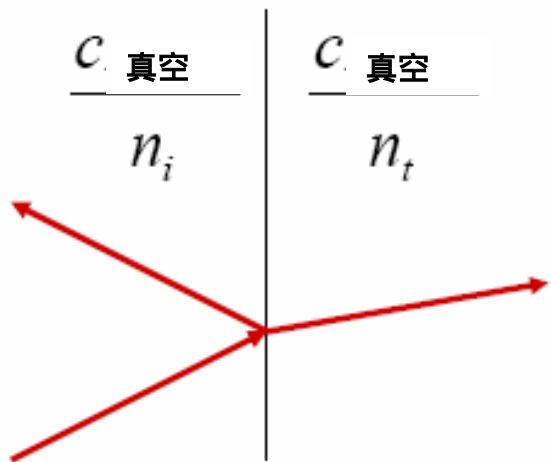


# 能量在介质分界面的反射和透射

复习坡印廷矢量定义：

$$\|\mathbf{S}\| = c \epsilon_0 \|\mathbf{E}\|^2$$

在分界面的两边是不同的

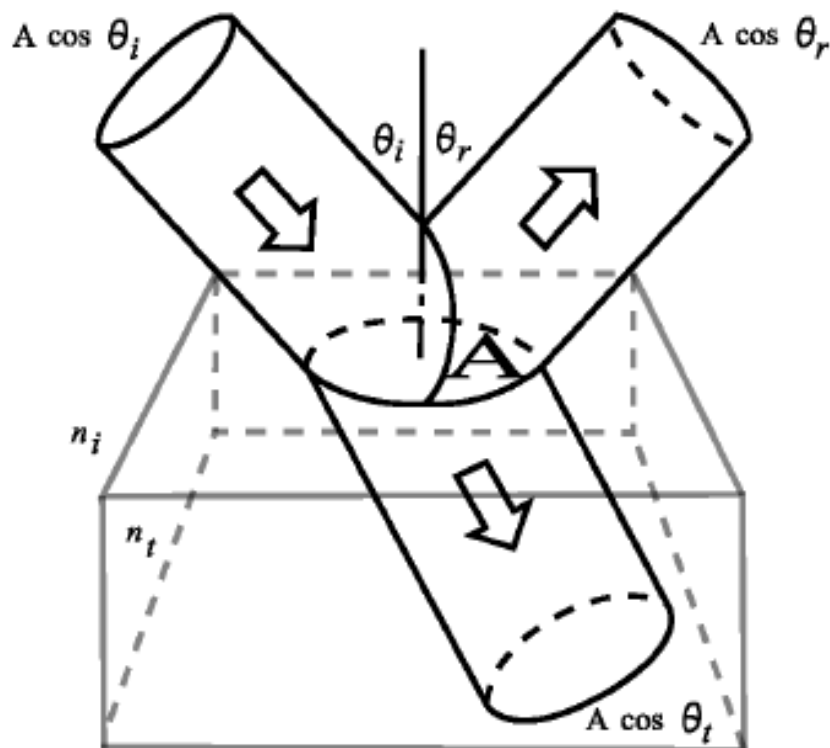


$$R = \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = r^2$$

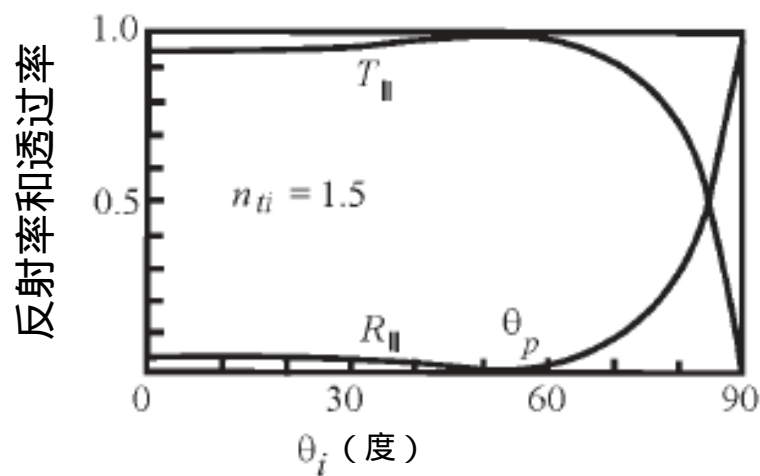
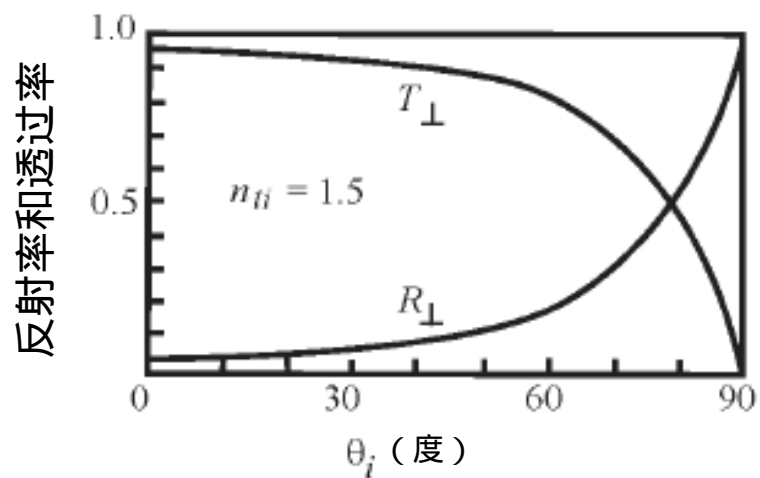
$$T = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} t^2$$

# 能量守恒

$$R + T = 1, \text{ i.e. } r^2 + \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} t^2 = 1$$



# 能量在介质分界面的反射和透射



# 垂直入射

注意：与偏振无关

$$r_{\perp} = \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

$$t_{\perp} = \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

$$r_{\parallel} = \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}$$

$$t_{\parallel} = \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}$$

$\theta_i = 0$  和  $\theta_t = 0$



$$r_{\perp} = r_{\parallel} = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}$$

$$t_{\perp} = t_{\parallel} = \frac{2n_i}{n_t + n_i}$$

$$R_{\perp} = R_{\parallel} = \left( \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \right)^2$$

$$T_{\perp} = T_{\parallel} = \frac{4n_t n_i}{(n_t + n_i)^2}$$

# 布儒斯特角

复习斯涅尔定理  $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$

$$r_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}$$

$$r_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t} = +\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

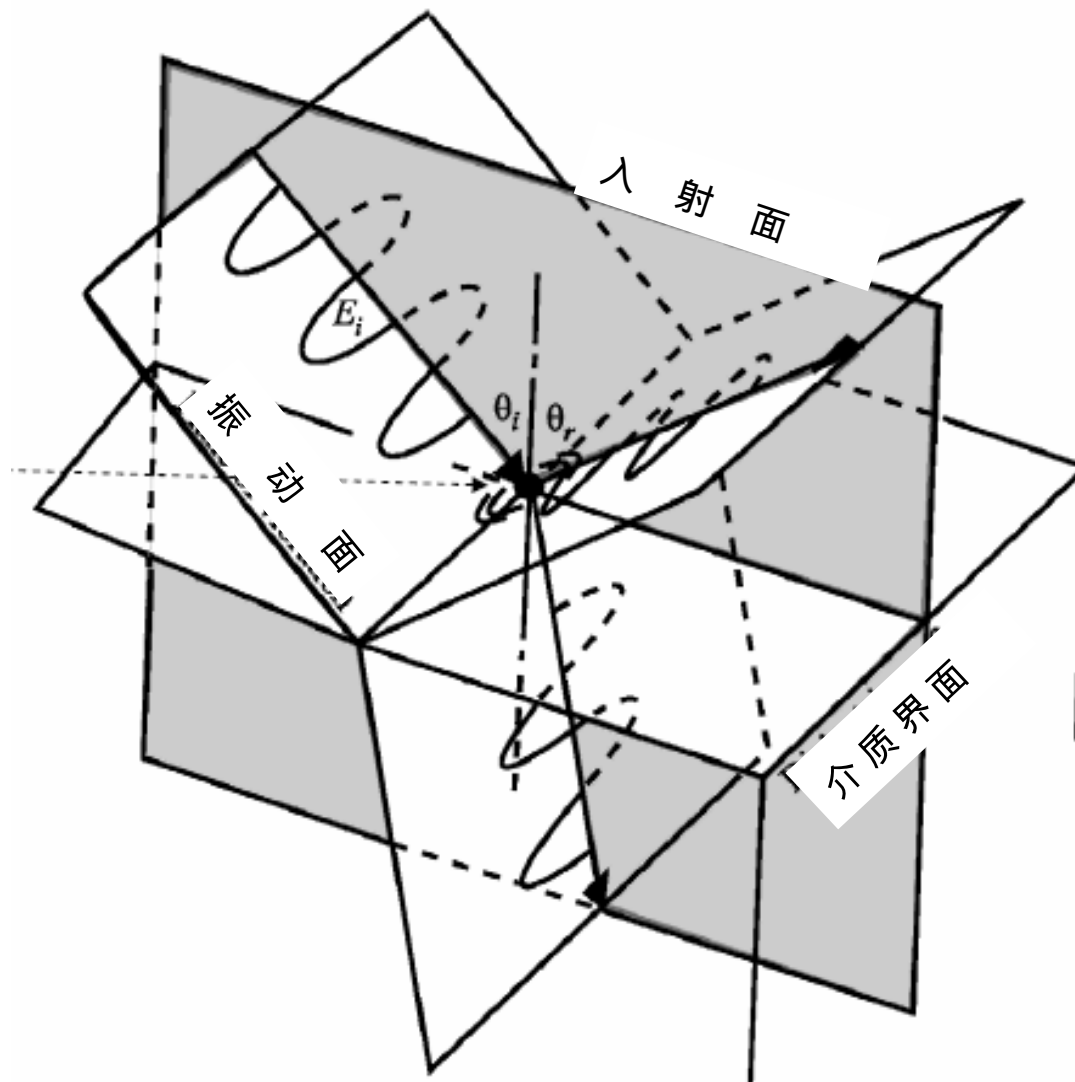
如果对所有的 $\theta_i$ ，均存在  $n_i \neq n_t, r_{\perp} \neq 0$

当  $\theta_i - \theta_t = \frac{\pi}{2} \left( \tan \theta_i = \frac{n_t}{n_i} \right), r_{\parallel} = 0.$

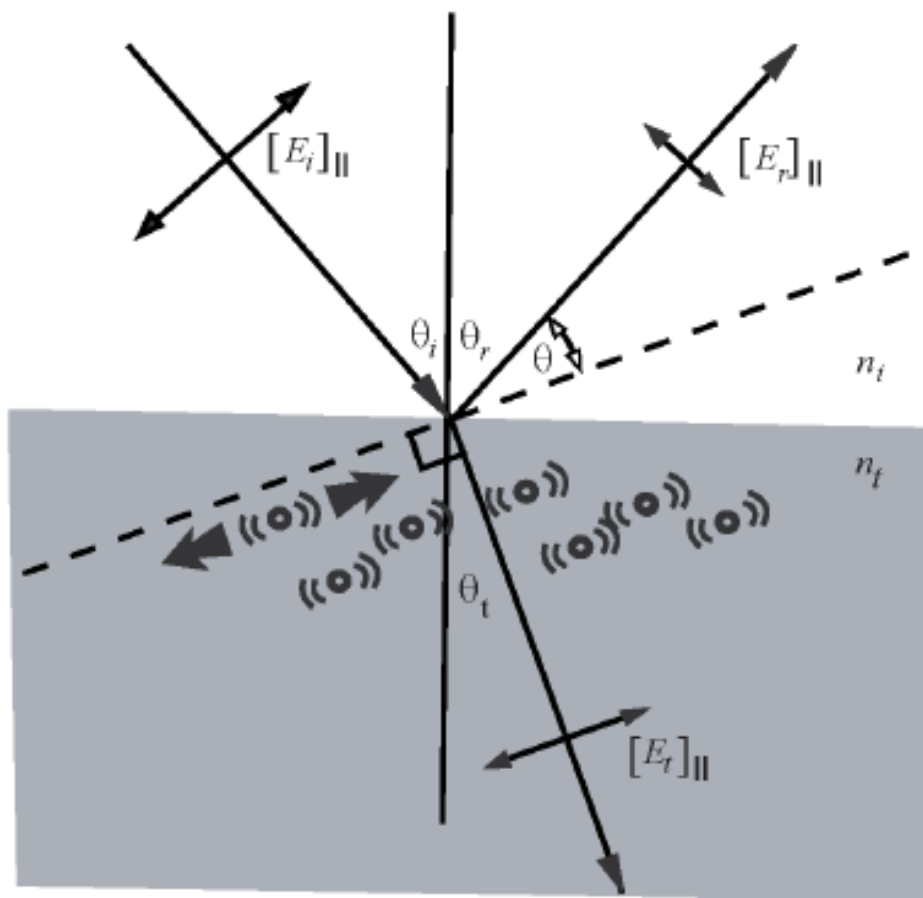
这个角即称之为布儒斯特角。在这种情况下，对入射的非偏振波只有垂直入射平面的偏振成分才被反射。

# 为什么会产生布儒斯特角？

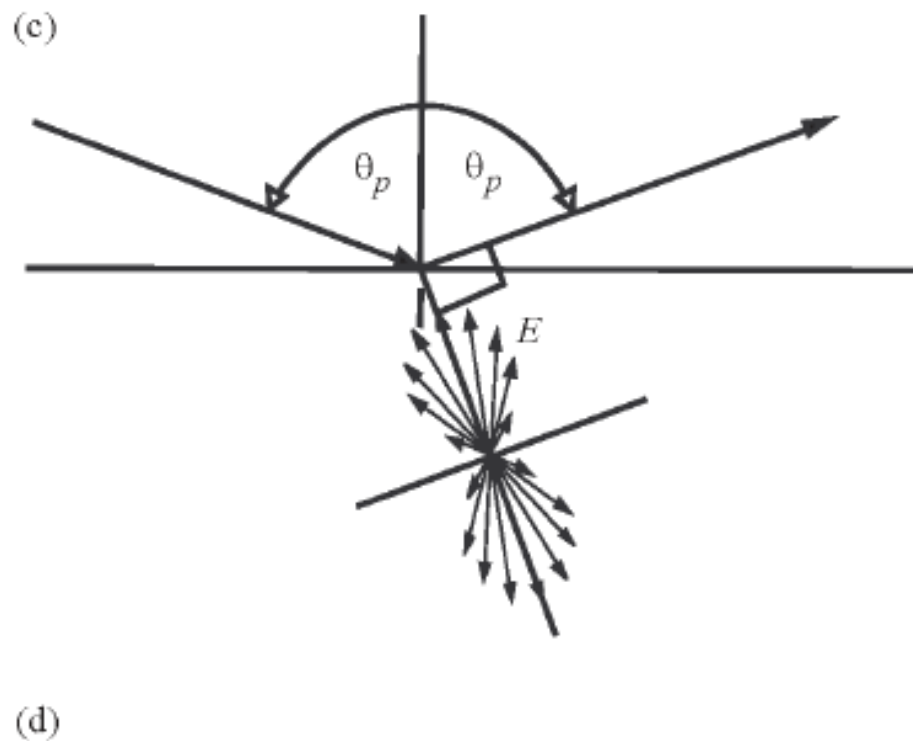
入射场激发  
的偶极子辐射源



# 为什么会产生布儒斯特角？

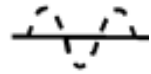


# 为什么会产生布儒斯特角？



# 为什么会产生布儒斯特角？

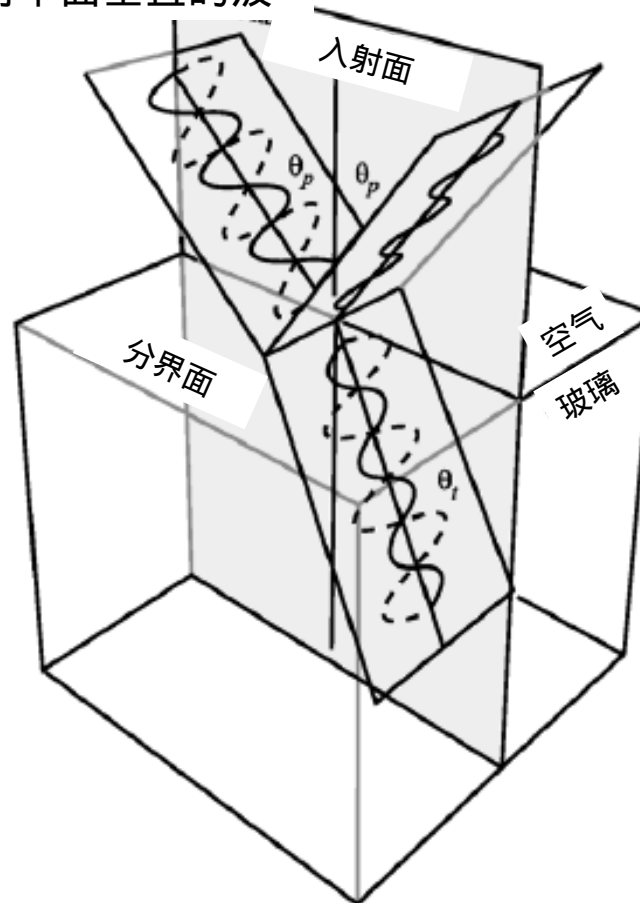
(d)



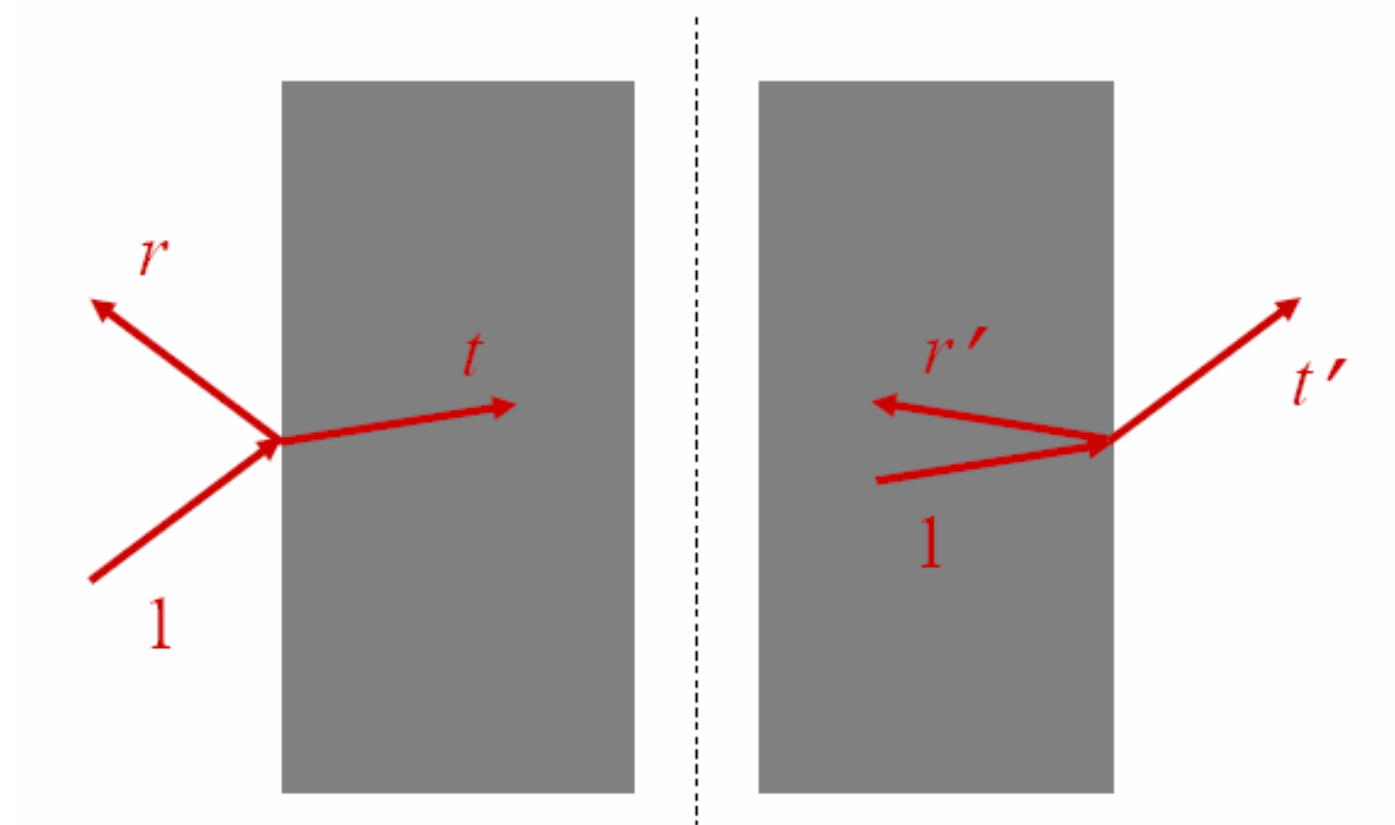
在入射平面内的波



与入射平面垂直的波

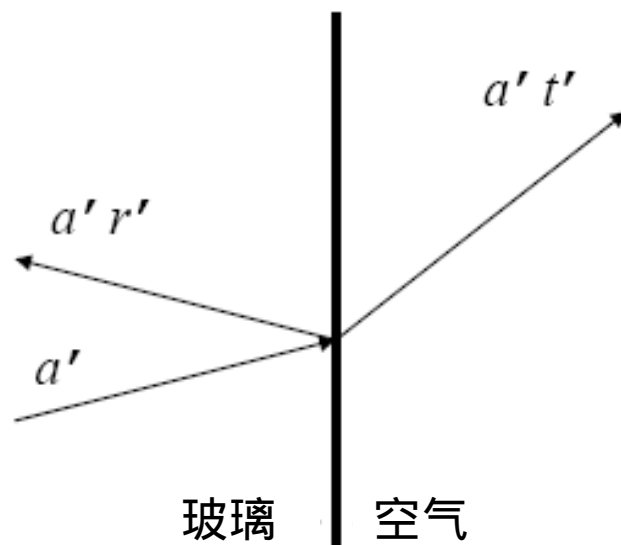
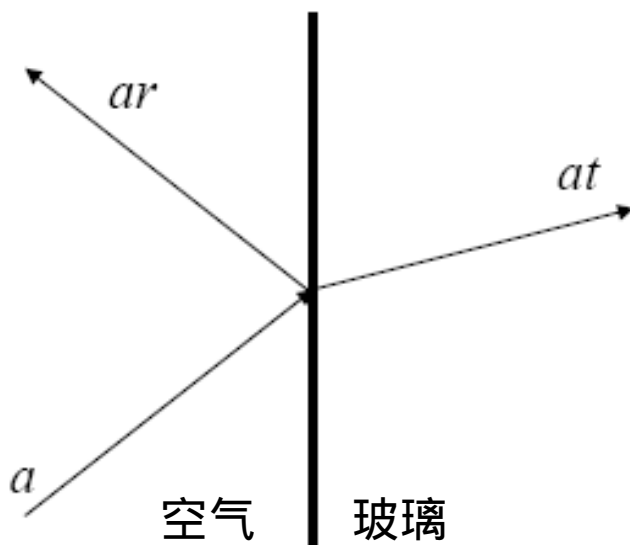


# 转动坐标



$r, t$  和  $r', t'$  之间有什么关系？

# $r, r'$ 和 $t, t'$ 之间的关系



$$r' = -r$$

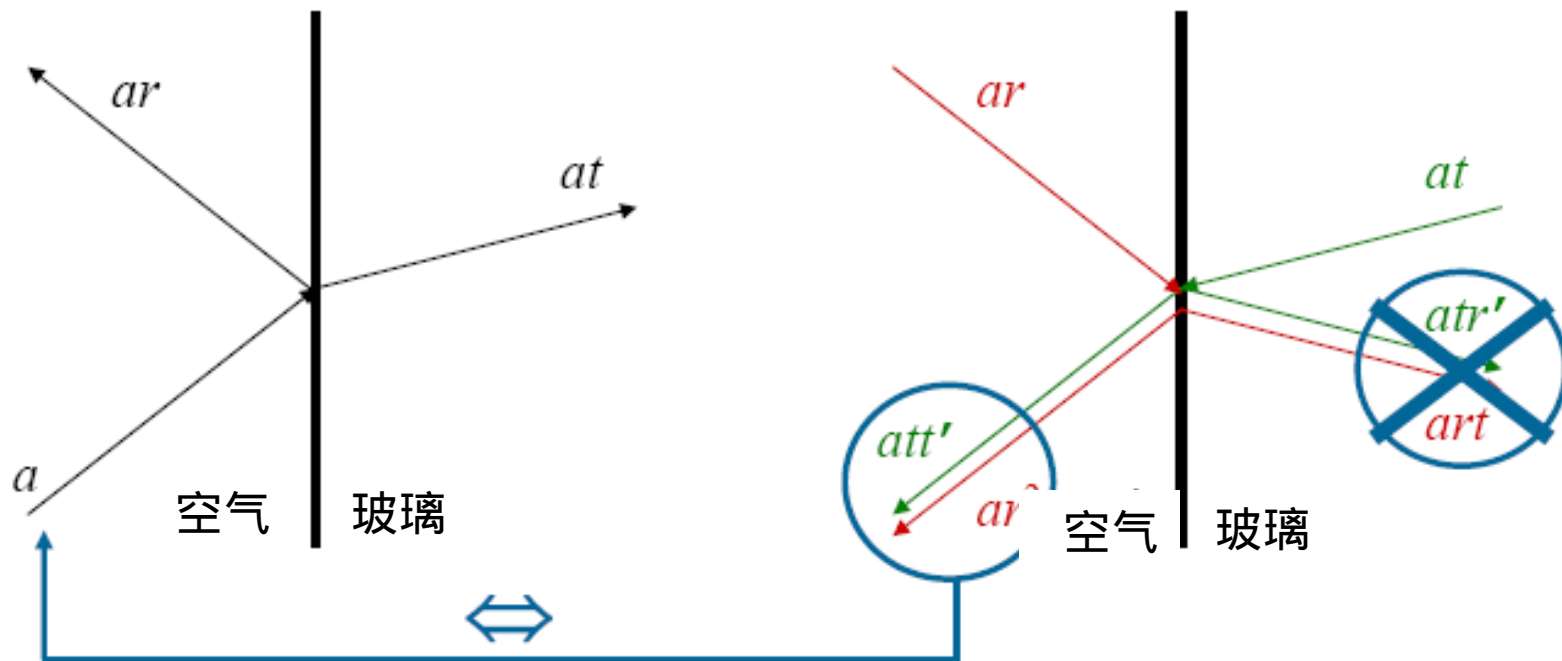
$$r^2 + tt' = 1$$

斯托克斯关系

证明：从菲涅耳系数得到代数关系，

或使用场对时间反转保持不变的性质

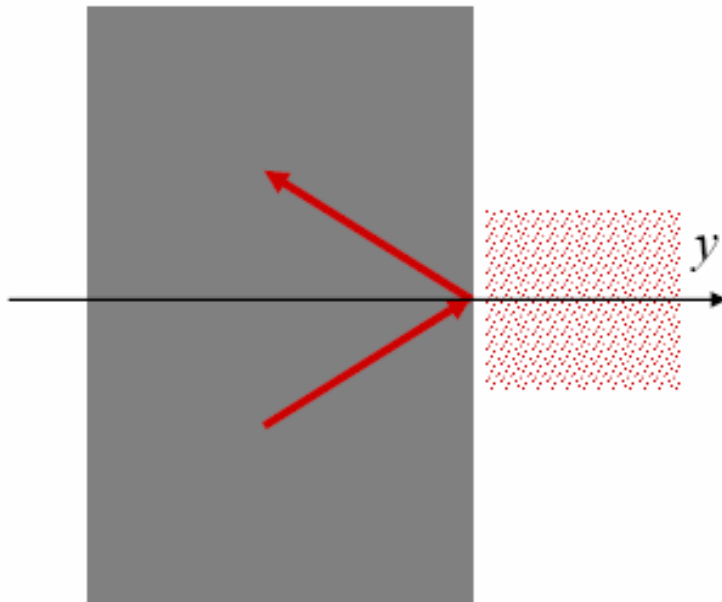
# 利用时间反转来证明



$$a(r + r')t = 0 \Rightarrow r = -r'$$

$$a(r^2 + tt') = a \Rightarrow r^2 + tt' = 1$$

# 全内反射



没有能量透过

发生在

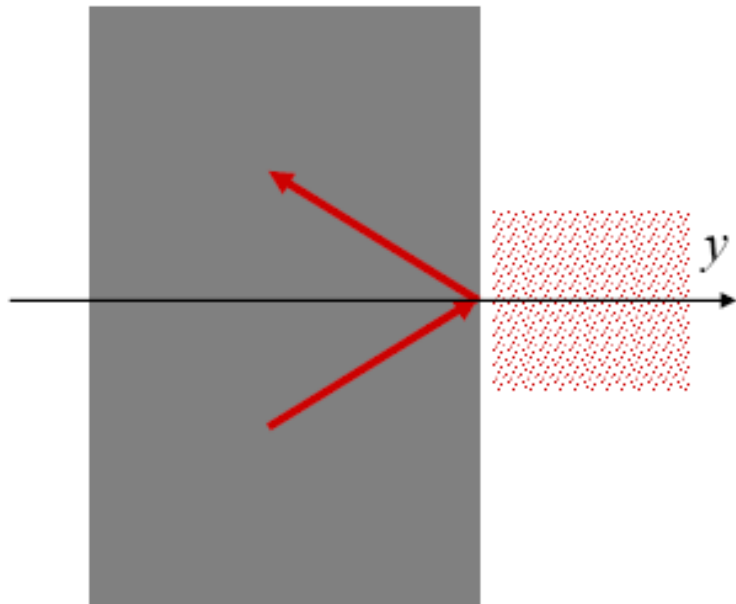
$$n_i \sin \theta_i > 1 \text{ 时}$$

代入斯涅尔定律

$$\sin \theta_t = \frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i > 1$$

如果  $\theta_t$  是复数则可成立

# 全内反射



没有能量透过

传播分量

$$E_t \propto \exp[ik_t y \cos \theta_t]$$

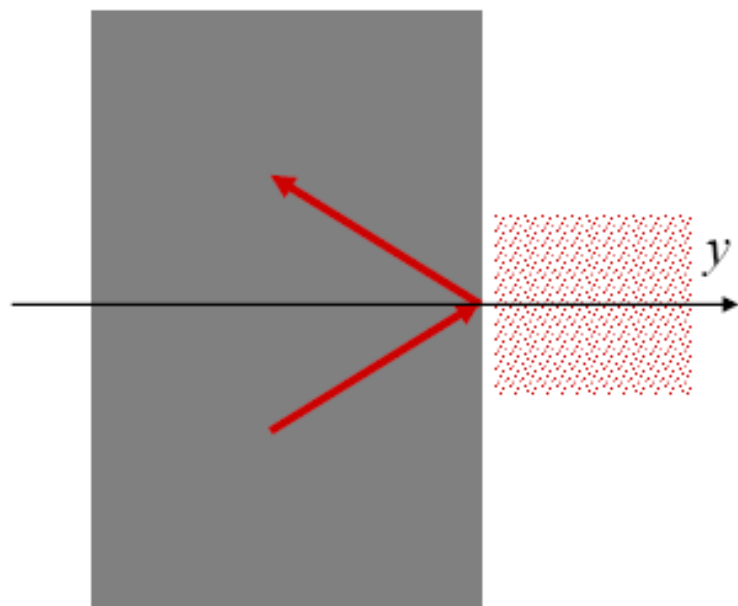
其中

$$\cos \theta_t = \pm i \sqrt{\frac{n_i^2 \sin^2 \theta_i}{n_t^2} - 1}$$

所以

$$E_t \propto \exp \left[ -k_t y \sqrt{\frac{n_i^2 \sin^2 \theta_i}{n_t^2} - 1} \right]$$

# 全内反射



$$E_t \propto \exp \left[ -k_t y \sqrt{\frac{n_i^2 \sin^2 \theta_i}{n_t^2} - 1} \right]$$

纯指数衰减  $\equiv$  倏逝波

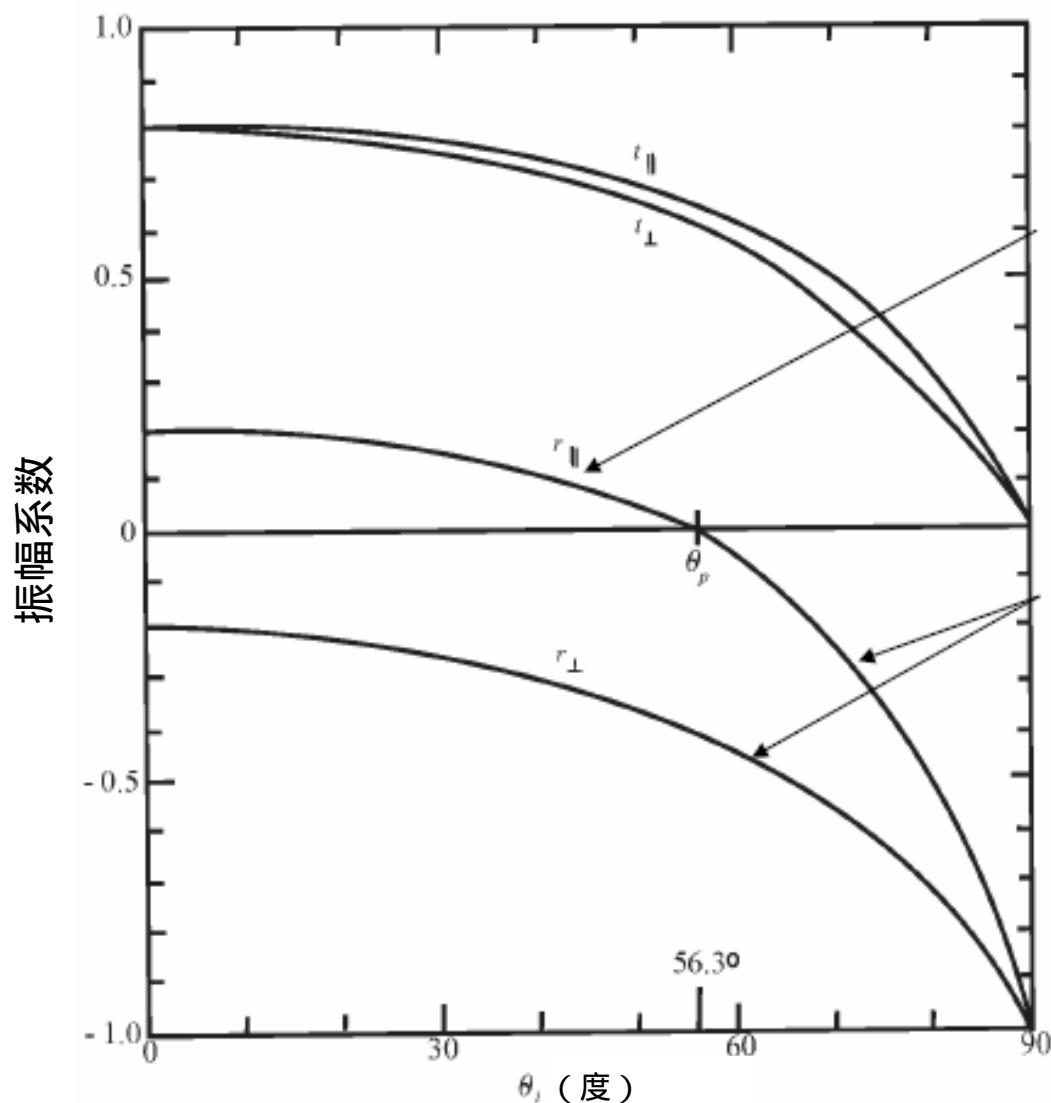
它可以表示成

$$\langle \| \mathbf{S}_t \| \rangle \approx 0$$

没有能量透过



# 反射引起的位相延迟



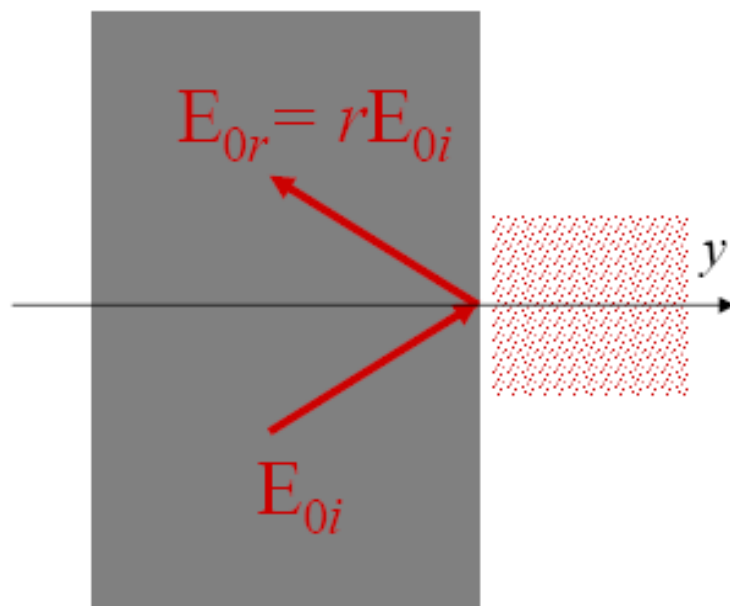
位相延迟是 0

位相延迟是  $\pi$

$n_i=1$  (空气)

$n_t=1.5$  (玻璃)

# TIR引起的位相延迟



$$r_{\parallel} = e^{i\delta_{\parallel}} \quad \text{和} \quad r_{\perp} = e^{i\delta_{\perp}}$$

其中

$$\tan \frac{\delta_{\parallel}}{2} = - \frac{n_i \sqrt{n_i^2 \sin^2 \theta_i - n_t^2}}{n_t^2 \cos \theta_i}$$

$$\tan \frac{\delta_{\perp}}{2} = - \frac{\sqrt{n_i^2 \sin^2 \theta_i - n_t^2}}{n_i \cos \theta_i}$$

# TIR引起的位相延迟

