

关于柱面镜成像的讨论

何菊明¹, 彭云雄²

(1. 武汉工程大学 理学院, 湖北 武汉 430073; 2. 黄石理工学院 师范学院, 湖北 黄石 435003)

摘要: 柱面镜以及一般镜面的成像规律问题, 涉及到高阶方程的求解, 在现行光学教材中缺少具体的答案. 本文提出了柱面镜成像的物像方程式, 并用计算机绘制了物像关系图.

关键词: 柱面镜; 成像规律; 数值模拟

中图分类号: O 435.1

文献标识码: A

文章编号: 1000-071X(2006)01-0017-02

生活中有些司空见惯的物理现象, 要想圆满地解释它, 有时会遇到意想不到的困难. 比如宾馆大厅中地砖缝线在不锈钢圆柱上所成的像, 这是大家都能见到的几何光学现象. 但是垂直于观察者到圆柱方向上的直线, 经柱面所成的像是抛物线吗? 这一问题在现行光学教材中缺少具体的答案^[1,2], 进一步分析后得知, 这是一个非近轴柱面镜成像问题, 涉及到高阶方程的求解. 笔者提出了此类问题的解决方案, 给出了圆柱面、抛物柱面的物像关系式, 并采用数值模拟的方法, 用计算机绘出了圆柱型镜面对直线、圆的物像关系图.

确定柱面成像中的物像关系有多种方法, 下面仅以斜率法为例. 将各反射点看作是与该点切面重合的平面镜上的一点, 然后根据反射定律, 以及物、像关于平面镜对称的特点确定像点位置.

1 柱面镜的物像关系

取柱的轴向为 z 轴, 设 xOy 平面与柱面的截线方程为 $y=f(x)$, 物点、反射点、观察者、像点的坐标分别是 $S(x, y)$, $P(x_0, y_0)$, $M(m_x, m_y)$, $S'(x', y')$ 则入射光线、反射光线的斜率分别为 $k_1 =$

$\frac{y-y_0}{x-x_0}$, $k_2 = \frac{y_0-m_y}{x_0-m_x}$, 镜面上反射点处的切线斜率

$k = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$, 如图 1 所示.

由光的反射规律可知, 入射光线、反射光线与 P 点切线的夹角相等, 即 $\frac{k-k_1}{1+kk_1} = \frac{k_2-k}{1+kk_2}$, 将 k_1, k_2 的

表示式代入其中并整理, 可得到物点与反射点的坐标关系式

$$y_0^2 - x_0^2 + \frac{k^2 - 1}{2k} [-2x_0y_0 + (x + m_x)y_0 + (y + m_y)x_0 - (m_yx + m_xy)] + (x + m_x)x_0 - (y + m_y)y_0 + (m_yx - m_xy) = 0 \quad (1)$$

由于 $M(m_x, m_y)$ 是定点, 且 $y_0 = f(x_0)$, $k = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} = k(x_0)$, 因此对任意的物点都可以求出反射点的坐标 (x_0, y_0) . 在图 1 中, $\alpha = \arctan k$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, $SP = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, 由于物点、像点关于 P 点的切线对称, 故有 $S'P = SP$, $x' = x_0 + S'P \cdot \cos \alpha$, $y' = y_0 + S'P \cdot \sin \alpha$.

对于 xOy 平面内的入射光线, 像点 S' 与物点 S 等高. 因此, 像点的坐标可以记作:

$$x' = x_0 + SP \cdot \cos \alpha, \quad y' = y_0 + SP \cdot \sin \alpha, \quad z' = z \quad (2)$$

这就是柱面镜成像的一般物像关系.

2 圆柱面镜的成像

对圆柱型镜面, 沿圆心与观察点连线方向取 x 轴, 如图 2 所示, 设观察点为 $M(L, 0)$, 反射点 P 的法线与 x 轴正向的夹角为 β . 将 $x_0 = R \cos \beta$, $y_0 = R \sin \beta$, $k = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} = -\frac{x_0}{y_0} = -\cot \beta$, $m_x = L$, $m_y = 0$ 代入式 (1), 即得

$$\left(2x \sin \beta + \frac{R}{L} \right) \cos \beta = -2y \sin^2 \beta + \left(1 + \frac{1}{L}x \right) R \sin \beta + y$$

令 $f = \sin \beta$ ($0 \leq f \leq 1$) 并整理上式, 则有

$$f^4 + bf^3 + cf^2 + df + e = 0 \quad (3)$$

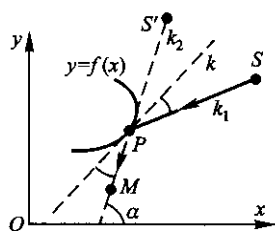


图 1 直线的斜率

其中:

$$b = -\frac{Ry}{x^2 + y^2} \quad c = \frac{(x+L)^2 + y^2}{4(x^2 + y^2)} \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 1$$

$$d = \frac{Ry(1-x/L)}{2(x^2 + y^2)} \quad e = \frac{1-(R/L)^2}{4(x^2 + y^2)} y^2$$

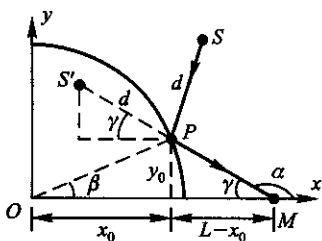


图2 物点与像点的关系

方程(3)的解析解比较复杂,我们可以运用数值计算方法求解此高阶方程,令 $F = f^4 + bf^3 + cf^2 + df + e$,编写一个简单的C语言程序,用计算机可以非常快捷地求出 $F \rightarrow 0$ 时方程的 f 值。

考虑到镜面成像的特点,程序中对物点坐标 $S(x, y)$ 的取值范围是有一定要求的。由于柱面镜具有对称性,这里只给出第一象限物点的取值条件:过 $M(L, 0)$ 点作圆的切线 l ,求出切点坐标 $N(m, n)$,对应的切线方程为 $y_l = \frac{R}{\sqrt{L^2 - R^2}}(L - x_l)$ 。当

$x \leq m$ 时, $y \geq \frac{R}{\sqrt{L^2 - R^2}}(L - x)$; 当 $x > m$ 时, $y >$

$\sqrt{R^2 - x^2}$ 。

求出对应于入射点的 β 值($f = \sin \beta$)之后,由 $x_0 = R \cos \beta$, $y_0 = R \sin \beta$, $\tan \gamma = \frac{y_0}{L - x_0}$, $S'P = SP = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$,由图2很容易求出像点坐标。

图3是用计算机绘制出的直线、圆的成像图,镜面上方是下边物线所成的像,其结果与实际观察一致。由此可知,垂直于观察者到圆柱方向的直线在柱面中的像不是二次方抛物线。

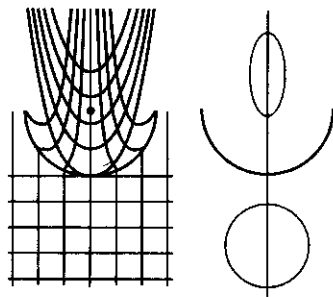


图3 直线与圆的像

3 抛物柱面镜的物像关系

对抛物柱面,以 z 方向为轴,垂直于轴的平面与镜面的截线方程设为 $x^2 = 2py$,观察点在 $M(0, -L)$ 处,将 $y_0 = \frac{x_0^2}{2p}$, $k = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} = \frac{x_0}{p}$ 代入式

(1),可得

$$\begin{aligned} & 3x_0^5 - 2(x + m_x)x_0^4 - 2p(y + m_y)x_0^3 + \\ & [4p(m_x y + m_y x) - 2p^2(x + m_x)]x_0^2 + \\ & 4p^2[p(y + m_y) - (m_y y - m_x x)]x_0 - \\ & 4p^3(m_y y + m_x x) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

取 $p = 1$,代入 $m_x = 0$, $m_y = -L$,则有

$$\begin{aligned} & 3x_0^5 - 2x \cdot x_0^4 - 2(y - L)x_0^3 - 22L + \\ & 1)x \cdot x_0^2 + 4(y - L + Ly)x_0 + 4Lx = 0 \end{aligned}$$

这是一个更高阶的方程,由此可知柱面镜成像问题是比较复杂的。但是按照以上方法,只要给出镜面与物点坐标关系式,对于任意形状的镜面成像问题,原则上都是可以解决的,也能够解释大家熟悉的“哈哈镜”之谜。

参考文献:

- [1] 母国光,战元令.光学[M].北京:人民教育出版社,1978.19~20,40~54.
- [2] Ronald Lane Reese. University Physics[M].北京:机械工业出版社,2002.1056~1064.

Discussion on imagery of cylindrical mirror

HE Ju-ming¹, PENG Yun-xiong²

(1. School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430073, China;

2. Normal School, Huangshi Institute of Technology, Huangshi, Hubei 435003, China)

Abstract: The equation of cylindrical mirror imagery is given, some relation maps of object and its image are drawn by computer.

Key words: cylindrical mirror; imagery law; numerical simulation