目　　次

§1　概 述 1
1.1　课程的目的与要求 4
1.2　仪器在机械过程中的位置 4
1.3　仪器的分类 4
1.4　本课程主要内容 5
1.5　一般仪器的基本组成 6
1.6　设计指导思想 6
1.7　设计原则 7
1.8　设计程序 7
§2　误差和误差分析方法 9
2.1　误差的概念 9
2.1.1　误差与不确定度 9
2.1.2　误差的分类 9
2.1.3　误差源 9
2.1.4　误差分析的目的 10
2.2　测量稳定度与测量结果的精密度 10
2.2.1　算术平均值的无偏性(以下讨论都是 n 次有限测量) .. 11
2.2.2　算术平均值的方差 11
2.2.3　方差估计—贝塞尔(Bessel)公式 11
2.2.4　标准偏差估计值的标准偏差 12
2.3　随机变量 12
2.3.1　随机变量的数字特征 12
2.3.2　常用随机变量的概率密度函数 12
2.4　仪器的随机不确定度的估计(置信水平) 17
2.4.1　用 t 分布来估计随机不确定度 17
2.4.2　X^2 分布应用于 σ^2 的区间估计 20
2.4.3　F 分布用于判断两组测量方差的相等性 22
2.5　仪器误差的分析方法 24
2.5.1　微分法(误差的独立作用原理) 24

2.5.2 几何法 25
2.5.3 逐步投影法(光电跟踪系统三轴误差分析) 25
2.5.4 作用线与瞬时臂法(详查相机像移补偿残差分析) 25
2.6 仪器误差的综合 26
2.6.1 方差合成原理合成随机误差 26
2.6.2 直接卷积合成(数值计算)随机误差 26
2.6.3 系统误差的合成 31
2.6.4 不同性质误差的合成 31
2.6.5 蒙特卡洛法合成 32
2.6.6 信号流动图法合成 37
§3 传递函数 46
3.1 用传递函数表示的线性系统随机信号的输入响应 46
3.2 控制系统的主要环节的传递函数 48
3.3 一个自由度机械系统的传递函数 50
3.4 光学系统传递函数 51
3.4.1 从物理概念上进行讨论 52
3.4.2 MTF 曲线的两个重要性质 54
3.5 光学传递函数的进一步认识 55
3.5.1 一维成像 55
3.5.2 二维成像 56
3.5.3 计算光学系统传递函数的三种方法 57
3.6 各种光学环节的传递函数 58
3.6.1 人眼的传递函数 58
3.6.2 底片的传递函数 60
3.6.3 大气调制传递函数的计算 61
3.6.4 振动与像移的传递函数 69
3.7 CCD 星载相机综合传递函数分析 71
§4 光学仪器中的坐标变换 81
4.1 用齐次坐标表示的三维图形的坐标变换 81
4.2 光路转折 83

4.3 平台调平误差引起的瞄准误差分析..... 85
4.4 折转光管位置装调误差引起的方位传递误差分析 88
4.5 瞄准中构件水平面内变形自动补偿分析..... 91
4.6 构件在中纵剖面内变形耦合后引起的方位自校正误差分析 95
4.7 构件沿纵轴扭转变形耦合后引起的方位自校正误差分析 101
4.8 航天相机像移速度的分析..... 104
4.8.1 坐标变换 104
4.8.2 像面位置方程 106
4.8.3 像移速度方程及像移速度求解..... 108

§1 概 述

1.1 课程的目的与要求

1)通过《光学仪器总体设计》课程学习，掌握光、机、电、算技术结合的仪器总体设计的有关主要基础理论知识。

2)初步掌握仪器总体设计和系统设计的方法。

3)初步具有正确地估算和分析仪器精度的能力。

1.2 仪器在机械过程中的位置

机械工程在发展过程中形成了能量、信息和材料三大技术领域。

按系统工程的观点，可以认为这三大技术领域又对应着以下三大技术系统：

1)仪器—以信息流、信息变换为主的技术系统。

如：测量仪器、控制仪器、电影机和照相机、计算仪器、天文仪器、导航仪器等。

2)机械—以能量、能量变换为主的技术系统。

如：液压机械、发动机、运输工具、农业机械、纺织机械、包装机械、制冷机械、建筑机械等。

3)器械—以材料流、材料变换为主的技术系统。

如：锅炉、冷凝器、热交换器、冷却器、过滤器、离心机等。

这三大技术系统之间的相互关系，可以由图 1.1 来说明。

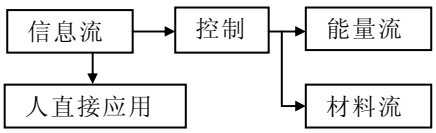


图 1.1 机械工程三大技术系统

1.3 仪器的分类

1)按产品分类(产品管理部门用):

工业自动化仪表与装置、电工仪器仪表、分析仪器仪表、

光学仪器、材料试验机、气象海洋仪器、照相机械、电影机械、生物医疗仪器、无线电电子测量仪器、航空仪表、船用导航仪表、地震仪器、汽车仪表、拖拉机仪表、轴承测试仪表。

2)从计量测试功能分:

a)计量仪器，如：长度计量仪器、时间频率计量仪器、力学计量仪器、电磁计量仪器、标准物质计量仪器(各种气体分析、有机分析、无机分析)、以及各种导出量仪器(速度、加速度等)。

b)非计量仪器，如：观察仪器、测绘仪器、跟踪测量仪器、定位定向仪器、监示仪器、记录仪器、计算仪器、调节仪器(控制仪)、各种调节器和自动调节装置。

1.4 本课程主要内容

随着科学技术的发展，现代仪器向着综合化方向发展，光机电算技术的综合、计量与非计量的综合。特别是原来只是机械制造或物理(光学)学科中的二、三级学科的光学仪器发展成了目前一级学科的光学工程。本课程试图以笔者多年从事研究和研制的以下三种属于光学工程的典型的光学仪器讲解光学仪器总体设计。为了帮助读者学习，同时也概括地介绍了四个方面有关的工程基础知识。本课程主要内容可以概括如下：

1)光电跟踪测量系统。

2)弹道导弹光电瞄准系统。

3)航空航天相机。

4)以及有关的工程基础知识:

a)误差和误差分析方法;

b)传递函数和摄影分辨力;

c)光学仪器中的坐标变换;

d)可靠性。

1.5 一般仪器的基本组成

1)基准部件

基准部件是仪器的重要组成部分,是决定仪器精度的主要环节。

如：量块、精密测量丝杠、线纹尺和度盘、多面棱体、多齿分度盘、光栅尺(盘)、磁栅尺(盘)、感应同步器等，以及测量复杂参数的基准部件，如：渐开线样板、表面粗糙度样板、标准齿轮、标准硬度块、标准频率计、标准照度、标准流量、标准色度、标准温度、标准测力计、标准重量、标准激光参数、标准波长等等。

2)传感和转换部分，用来感受被测量量值和拾取原始信号，如：接触式—各种机械式测头；非接触式—非接触测头、光学探头和传感器、涡流探头，以及各种拾音器等。

3)转换放大部件。

4)记录、存贮与压缩。

5)瞄准部件。

6)信号处理与数据计算装置。

7)显示部件。

8)驱动控制器。

9)机械结构部分。

10)热控。

11)操作和运行管理。

12)软件等。

1.6 设计指导思想

仪器设计应根据用户的需要，全面地权衡以下几个主要要求。

1)精度要求，对于测量仪器,首要是满足精度指标。

2)经济性要求，不应盲目地追求复杂、高级的方案，不能一概而论，应综合匹配。

3)效率要求，自动化程度(智能化程度)和实用性。

4)可靠性要求，不但要考虑任务可靠性，同时还要考虑基

本可靠性，并要使仪器具有最低的全寿命管理成本。

5)造型要求，要使仪器造型优美、色泽柔和、美观大方、外廓整齐、细部精致。

1.7 设计原则

为了减少仪器误差，保证精度，在设计时应考虑以下原则。

1)从原理上提高精度的原则。

a)误差平均原理，例采用多次重复测量，取平均误差；采用密排滚珠导轨、多齿分度盘、静压导轨等均化误差；

b)位移量同步比较原则，例采用时统、同步采样等减小不同步而引起的误差；

c)误差补偿原理，例采用校正环节、补偿环节等减少或消除系统误差。

2)阿贝原则。

3)运动学设计原理原则,合理的设置和设计空间自由度的约束数和约束。

4)变形最小原则。

5)表面合一原则，使设计基准、加工基准、检验基准和装配基准尽量一致的原则。

6)最短传动原则。

7)精度匹配原则。

8)仪器零部件的标准化、系列化、通用化原则。

9)仪器可靠性、安全性、可维性、可操作性原则。

10)结构工艺性好原则。

11)造型与装饰宜人原则。

12)价值系数最优原则(价格/性能比最佳原则)。

1.8 设计程序

1)确定仪器任务，根据用户要求、国家发展要求和国内外

市场需求来确定。

2)调查研究国内外同类产品的性能、特点和技术指标。

3)对设计任务进行分析，制定设计任务书。

4)总体方案设计，包括：

a)实现功能分析;

b)确定信号转换原理和流程;

c)确定有关光、机、电系统合理匹配，并建立数学模型;

d)确定主要参数;

e)技术经济评价。

分析时要画出示意草图、关键部件结构草图、初步的精度计算和精度分配；进行方案论证和必要的模拟试验。

5)技术设计，包括：

a)总体，包括结构设计、光路设计、电控(电路)设计、可靠性设计、热设计、软件设计等;

b)部件设计;

c)零件设计;

d)精度计算;

e)技术经济评价;

f)编写包括分析和计算的设计说明书;

g)检测试验设计。

6)制造样机，进行产品试验；样机鉴定，编写设计说明书、使用说明书，检定规程； 设计定型，生产定型。

7)批量生产。

§2 误差和误差分析方法

2.1 误差的概念

2.1.1 误差与不确定度

测量误差：真实值与测量值之间的差异,分为：随机误差、系统误差、粗大误差。

不确定度：凡是用区间给出的误差指标皆称为不确定度。

不确定度 = 准确度 + 精密度

(系统误差)(随机误差)

2.1.2 误差的分类

按误差性质可分为：系统误差、随机误差。

按被测参数的时间特性可分为：静态参数误差、动态参数误差。

2.1.3 误差源

原理误差(或称设计误差)：建立数学模型时的简化，例：三维简化为二维；二维简化为一维；非正交简化为正交；忽略高阶项；非线性简化为线性等都会引起误差。

加工、制造误差：元器件的制造和标定中的波动；材料的各向异性、不均匀性、内应力的不均匀性；加工零部件和整机的加工、装配、标定测试中的波动等都会成为误差来源。

运行误差：由于运行中的环境干扰，有力波动(例变载荷、振动、冲击)、热波动、电源波动、电磁环境波动(高频、低频)、静电、幅照、尘埃、化学反应、杂光和噪声等等；仪器的磨损以及操作人员人为的波动(心理、生理、熟练程度)等等因素引起的误差统称为运行误差。

2.1.4 误差分析的目的

误差分析的目的可以分为两类：一类是对于仪器的使用人员关心的问题，如何应用好各类计量和测量仪器，分析造成仪器测量不确定度的各种误差因素，在测量中对测量方法、操作过程、测量环境和测量结果的处理进行严格的控制，达到避免或减小各误差因素的影响，减小仪器测量结果的不确定度，或者是提高仪器测量结果的可信度。

第二类是对于仪器的设计、制造人员关心的问题，如何在设计过程中全面分析可能造成仪器测量不确定度的各种误差因素，在满足用户使用要求的前提下，根据研制、生产单位的技术基础、研制或生产成本，严格而合理地控制设计、材料和元器件的选用、制造、装配、检验的各个环节，达到研制或生产的各种计量和测量仪器性能优良、操作使用方便、可靠性高、全寿命运用费用低的目的。

2.2 测量稳定度与测量结果的精密度

在相同条件下，用同一仪器对被测量值 a(真值)进行 n 次、独立、无系统误差的测量，得到数的序列 x_1，x_2，……x_n，设其算术平均值为 X，单个测得值一般都落在 B 和 B′ 两条水平线的区间 B-B′ 范围，该区间称误差带如图 2.1 所示。

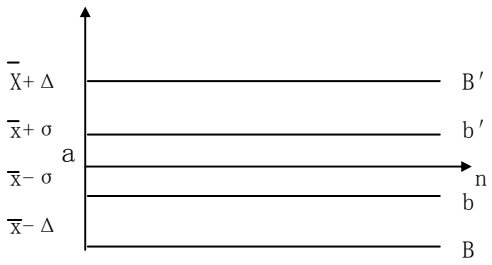


图 2.1 误差带示意图

其中：Δ—称为误差界限或极限误差或随机不确定度，用 Δ 描述仪器的精密度、重复性、或分散性。

$$\Delta = C\sigma \qquad (2.1)$$

其中：C—称为置信因子；

σ —单个测得值的标准偏差，一般取 C=2～3。

2.2.1 算术平均值的无偏性**(以下讨论都是 n 次有限测量)**

无偏性是指未知参数的估计值的数学期望等于未知参数本身。设：未知参数的真值为 a，估计量为 $\overline{X}$ 、期望为 $M(\bar{x})$，$M(\bar{x})=a$。

$$M(\bar{x})=\frac{1}{n}(M[x_1]+\cdots\cdots+M[x_n])=\frac{1}{n}(a+\cdots\cdots+a)=a \quad (2.2)$$

2.2.2 算术平均值的方差

测量时真值 a 是稳定不变的，作为真值 a 的无偏估计值为 $\overline{X}$。它具有方差为：

即：
$$V_{ar}(\bar{x})=\sigma^2/n$$
$$\sigma_{\bar{x}}=\sigma/\sqrt{n} \quad (2.3)$$

式中：σ 为单一测得值标准偏差，是表征测量仪器的精密度的量值，一个确定的仪器对应着一个确定的 σ 值。

(2.3)式表明这是减小实验结果的随机误差的一个途径，也是仪器设计中提高仪器精密度的一个途径。通过多次测量可以减小实验结果的不确定度，仪器设计中采用多元测量或多次采样平均可以提高仪器的精密度。不同性质的被测对象和仪器的 σ 值表征的物理意义见表 2.1。只有当被测对象是稳定不变的时候，多次测量才有意义，$\overline{X}$ 估计值的平均偏差为：$\sigma_{\bar{x}}=\sigma/\sqrt{n}$ ，否则没有意义。

表 2.1 σ 值表征的物理意义

	被测对象	仪器	σ（或Δ）表征
1	稳定不变	变动	测量仪器的重复性或分散性
2	变动	稳定不变	被测对象的波动性或稳定性
3	变动	变动	两者的综合效应尽力改变或避免，需用特殊的计算方法

2.2.3 方差估计—贝塞尔(Bessel)公式

在真值 a 未知的情况下，只能获得 $\overline{X}$ 和残余误差：

$v_i=X_i-\overline{X}$，　　i=1，……n

这时可以利用贝塞尔公式，求出方差σ的估计值:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \cdots\cdots v_n^2}{n-1} \tag{2.4}$$

而$\hat{\sigma}^2$的期望为:

$$M[\hat{\sigma}^2] = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right] = \sigma^2$$

。

在a真值已知时：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \cdots\cdots v_n^2}{n} \tag{2.5}$$

其中：$v_i = x_i - a$

2.2.4 标准偏差估计值的标准偏差

$$\hat{\sigma}(s) = \frac{s}{\sqrt{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{2(n-1)}} \tag{2.6}$$

其中：$s^2 = (v_1^2 + \cdots\cdots + v_n^2)/(n-1)$。

只要n足够大，$\hat{\sigma}(s)$不会很大，只是$\hat{\sigma}$(标准偏差的估计值)的很小的一部分。

2.3 随机变量

误差分析的数学基础是概率论和统计分析，以下将介绍概率和统计中的基本概念。

2.3.1 随机变量的数字特征

将常用的随机变量的数字特征归纳在表2.2中。

2.3.2 常用随机变量的概率密度函数

将常用的随机变量的概率密度函数归纳在表 2.3 中。其对应的函数曲线示于图2.2。

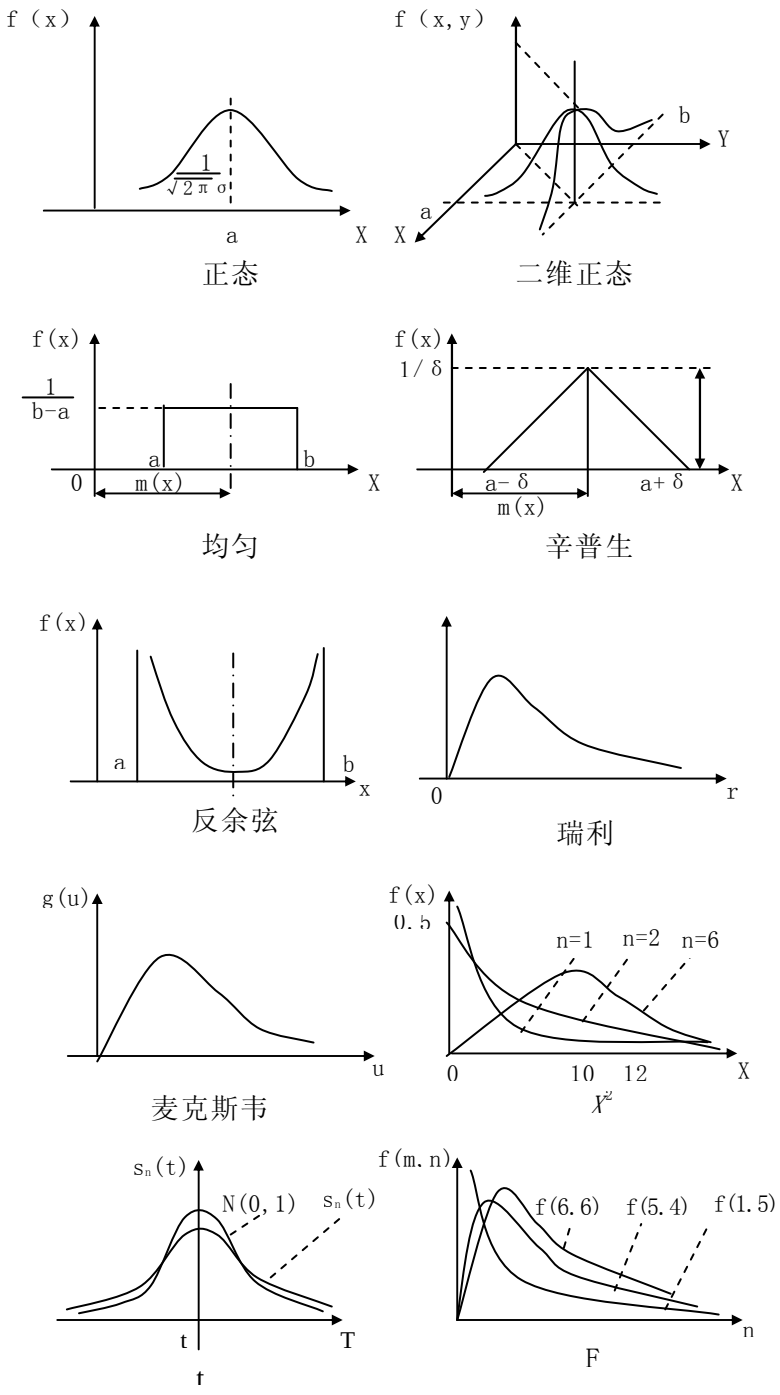


图 2.2 常用的概率密度函数的曲线

2.4 仪器的随机不确定度的估计(置信水平)

即用 $\bar{x}$ 代替 m_x、$\hat{\sigma}$ 代替 $\sqrt{D_x}$ 后的残余误差的估计,其中 m_x 为 x 的期望值，D_x 为 x 的散度。

2.4.1 用 t 分布来估计随机不确定度

由公式(2.1)可知，随机不确定度 Δ 为 C 倍标准偏差，在 n 为有限次情况下，由贝塞尔公式(2.4)来估计方差 $\hat{\sigma}$，这时，随机不确定度为：

$$\Delta = tg_a(k)\hat{\sigma} \tag{2.7}$$

以置信水平 p 或显著性水平 α (p+α=1)，确定随机误差的界限。式中 $tg_a(k)$ 是自由度为(k=n-1)时的 t 分布(或学生分布)的置信因子。

当 X 为 N(α，σ^2)正态分布时，$\frac{\bar{x}-a}{\sigma/\sqrt{n}}$ 也为正态分布 N(0,1)。

而统计量：

$$t = \frac{\bar{x}-a}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \tag{2.8}$$

不再遵从 N(0,1)正态分布，而是遵从自由度为 k=n-1 的 t 分布。

其概率密度函数为：

$$S_k(t) = \frac{1}{k^{1/2}B(\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2})}(1+\frac{t^2}{k})^{-(k+1)/2} \tag{2.9}$$

式中：B(•)为贝塔函数，而：

$$\frac{1}{k^{1/2}B(\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2})} = \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{(k\pi)^{1/2}\Gamma(k/2)} \tag{2.10}$$

式中：$\Gamma(m) = \int_0^\infty t^{m-1}e^{-t}dt$　　（m＞0）

即：　　$$S_k(t)=\frac{\Gamma[(k+1)/2]}{(k\pi)^{1/2}\Gamma(k/2)}\cdot(1+\frac{t^2}{k})^{-(k+1)/2} \qquad (2.11)$$

类似于正态分布的求解方法，t 落在区间$(-t_\alpha(k),t_\alpha(k))$中的概率(见图 2.3)为(不过比正态分布略为复杂的是多了一个自由度 k)：

$$P(|t|<t_\alpha)=2\int_0^{t_\alpha}S_k(t)dx=1-\alpha \qquad (2.12)$$

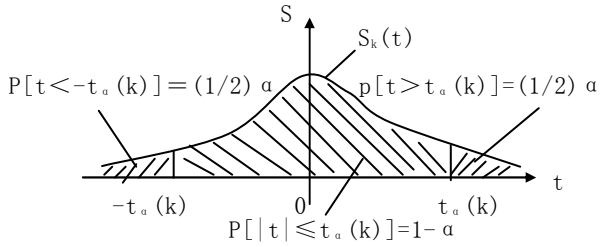


图 2.3 $S_k(t)$概率密度函数曲线

由式(2.8)和(2.12)可得：

$$P(|\bar{x}-a|<t_\alpha(k)\hat{\sigma}/\sqrt{n})=1-\alpha \qquad (2.13)$$

因此仪器对同一被测量值作 n 次测量后，其算得的算术平均值的随机不确定度可表示为：

$$\Delta_{\bar{x}}=t_\alpha(k)\hat{\sigma}/\sqrt{n} \qquad (2.14)$$

而 n 次测量中每个单次测得值 X 的随机不确定度可对应表示为：

$$\Delta_x=t_\alpha(k)\hat{\sigma} \qquad (2.15)$$

归纳：

1)由无穷多次测量获得的仪器的随机不确定度(误差界限或极限误差)，即期望值：

$\Delta=C\cdot\sigma$

其中：C—置信因子，一般 C=2～3，当 C=2，$1-\alpha=95\%$，

当 C=3，$1-\alpha=99.7\%$；

σ -单个测量值的标准偏差。

2)由有限次测量获得的仪器随机不确定度:

对同一被测量值，作 n 次测量(n 有限次)，其算术平均值($\bar{x}$)的随机不确定度为：

$$\Delta_{\bar{x}} = t_{\alpha}(k)\hat{\sigma}/\sqrt{n}$$

而 n 次测量中，每个单次测值 x 的随机不确定这为：

$$\Delta_{x} = t_{\alpha}(k)\hat{\sigma}$$

其中：$C = t_{\alpha}(k)$--置信因子；α -显著度；1-α -置信水平,

而 $P(|\bar{x} - a| < t_{\alpha}(k)\hat{\sigma}/\sqrt{n}) = 1-\alpha$。

t 分布与 N(0，1)的关系：

3) 当 k→∞，即 n→∞，这时 $\hat{\sigma} \to \sigma$，则 t 变量就是标准化正态变量，因此 t 分布→N(0，1)。表 2.4 列出了在不同的自由度 k 和显著度 α 下，t 分布的置信因子$t_{a}(k)$数值表。应用该表我们可以根据显著度 α 的要求，确定抽样数(k+1)；或根据抽样数(或测量次数)，估计出显著度 α 和置信因子 C。

表 2.4 t 分布的置信因子$t_{\alpha}(k)$数值表

自由度(k)	显著度(α)		自由度(k)	显著度(α)	
	α=0.01	α=0.05		α=0.01	α=0.05
1	63.7	12.7	18	2.88	2.10
2	9.92	4.30	19	2.86	2.09
3	5.84	3.18	20	2.84	2.09
4	4.60	2.78	21	2.83	2.08
5	4.03	2.57	22	2.82	2.07
6	3.71	2.45	23	2.81	2.07
7	3.50	2.36	24	2.80	2.06
8	3.36	2.31	25	2.79	2.06
9	3.25	2.26	26	2.78	2.06
10	3.17	2.23	27	2.77	2.05
11	3.11	2.20	28	2.76	2.05
12	3.06	2.18	29	2.76	2.04
13	3.01	2.16	30	2.75	2.04
14	2.98	2.14	40	2.70	2.02
15	2.95	2.13	60	2.66	2.00
16	2.92	2.12	120	2.62	1.98
17	2.90	2.11	∞	2.58	1.96

对于 t 分布，$t_\alpha(k)=3$，即在$\Delta=t_a(k)\hat{\sigma}=3\hat{\sigma}$时，不同的测量次数 n 时，可具有的置信水平列于表 2.5。而对于正态分布时置信水平与置信因子之间的关系列于表 2.6。由此可以看出，由此可以看出，当测量次数$n=\infty$时，t 分布$\Delta=3\hat{\sigma}$的置信水平与正态分布$\Delta=3\sigma$的置信水平相等。也就是当测量次数为无限多次时，t 变量就是标准化正态变量，$\hat{\sigma}\to\sigma$。图 2.4 中可以看出，k=∞的 t 分布就是标准化正态分布，可以看出 t 分布包含了正态分布，而正态分布只是 t 分布的一个特例。所以 t 分布在研究小子样问题(或有限次测量)中，是一个严密而有用的理论分布。

表 2.5 $3\hat{\sigma}$具有的置信水平

N	2	4	8	14	∞
$1-\alpha=P[\ \|t\|\le t_\alpha(k)]$	0.8	0.95	0.98	0.99	0.9973

表 2.6 正态分布时的置信因子

显著度 α	0.3173	0.05	0. 0455	0.01	0. 0027
置信水平 P=1-α	0.6827	0.95	0. 9545	0.99	0. 9973
置信区间 C（置信因子）	1	1.96	2	2.58	3

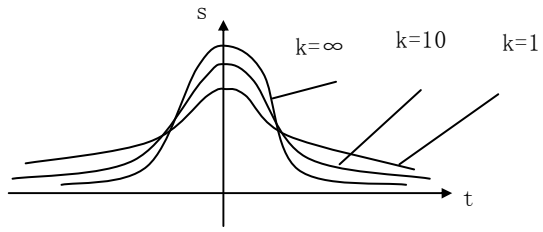


图 2.4 不同自由度下的 t 分布曲线

2.4.2 X^2分布应用于σ^2的区间估计

若 X_i～N(α，σ^2),则可以证明统计量:

$$X=X^2(k)=\frac{k\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \tag{2.16}$$

遵从自由度为 k(这里为 n-1)的 X^2 分布，其概率密度函数为：

$$g_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}X^{k/2-1}e^{-x/2} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases} \tag{2.17}$$

并且其期望和方差分别为：

$E(X)=k$，　$V_{ar}(X)=2k$

所以：

$$P(X^2_{1-\alpha/2}\leq X<X^2_{\alpha/2})=\int_{x^2_{1-\alpha/2}}^{x^2_{\alpha/2}}p(x)dx$$

$$=\int_{x^2_{1-\alpha/2}}^{\infty}p(x)dx-\int_{x^2_{\alpha/2}}^{\infty}p(x)dx$$

$$=1-\alpha \tag{2.18}$$

若给定置信水平(1-α)，则 $x^2_{1-\alpha/2}$ 和 $x^2_{\alpha/2}$ 可求，于是在置信水平(1-α)情况下，有：

$$P(x^2_{1-\alpha/2}\leq\frac{k\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}<x^2_{\alpha/2})=1-\alpha$$

因此，方差 σ^2 的置信区间为：

$$\frac{k\hat{\sigma}^2}{x^2_{\alpha/2}}<\sigma^2\leq\frac{k\hat{\sigma}^2}{x^2_{1-\alpha/2}} \tag{2.19}$$

其中：$\hat{\sigma}^2$ 为作(k+1)次测量，得出的方差估值。

式(2.19)的物理意义为：在给定的α时，作(k+1)次测量中，单次方差 σ^2 的置信区间。即由于测量只能作有限次，$\hat{\sigma}^2$ 是可以估计的，σ^2 的确切值不知，但是 σ^2 的区间可以估计出来，如图 2.5 所示。

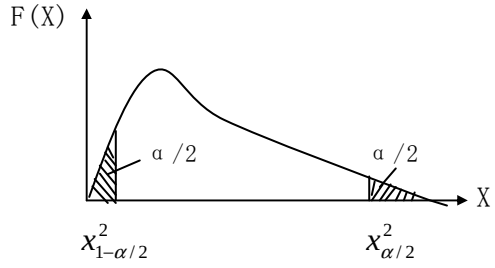


图 2.5 X^2 分布图

由(2.19)式，可导出 $\hat{\sigma}$ 相对误差的置信区间：

$$\sqrt{\frac{x^2_{1-\alpha/2}}{k}}-1\le\frac{\hat{\sigma}-\sigma}{\sigma}<\sqrt{\frac{x^2_{\alpha/2}}{k}}-1 \qquad (2.20)$$

式(2.20)的物理意义为：作(k+1)次测量，获得$\hat{\sigma}$，虽然与σ的相对误差的确切值不知，但是相对误差的区间是可以估计出来的。估计的标准偏差的相对误差约不超过 1/3 时，对应的测量次数为 30 次，这时 p=0.99；对应的测量次数为 15 次，这时 p=0.95。

表 2.7 $x^2_{1-\alpha/2}$、$x^2_{\alpha/2}$数值表

k	α =0.01		α =0.05	
	$x^2_{1-\alpha/2}$	$x^2_{\alpha/2}$	$x^2_{1-\alpha/2}$	$x^2_{\alpha/2}$
1	——	7.879	0.001	5.024
2	0.010	10.597	0.051	7.378

表 2.8 $(\hat{\sigma}-\sigma)/\sigma$的下界与上界($r_1$与$r_2$)

k	α =0.01		α =0.05	
	r_1	r_2	r_1	r_2
5	-0.71	0.83	-0.59	0.60
10	-0.54	0.59	-0.43	0.43
15	-0.45	0.48	-0.35	0.35
20	-0.39	0.41	-0.31	0.31
30	-0.32	0.34	-0.25	0.25
40	-0.28	0.29	-0.22	0.22

2.4.3 F 分布用于判断两组测量方差的相等性

若$X_1\sim N(\alpha_1,\sigma_1^2)$与$X_2\sim N(\alpha_2,\sigma_2^2)$独立，令：

$$F(m,n)=\frac{X^2(m)}{m}/\frac{X^2(n)}{n}=\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\sigma_1^2}/\frac{\hat{\sigma}_2^2}{\sigma_2^2} \qquad (2.21)$$

其中：$\hat{\sigma}_1^2=\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1^2)/(n_1-1)$；

$\hat{\sigma}_2^2=\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2^2)/(n_2-1)$。

则 F 遵从自由度为 $m=n_1-1$、$n=n_2-1$ 的 F 分布，其概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}(\frac{n_1}{n_2})^{n_1/2}\dfrac{x^{n_1/2-1}}{(1+\frac{n_1}{n_2}x)^{(n_1+n_2)/2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases} \qquad (2.22)$$

$$P(F_{1-\alpha/1} \le x < F_{\alpha/2}) = \int_{F_{1-\alpha/2}}^{F_{\alpha/2}} f(x)dx$$
$$= \int_{F_{1-\alpha/2}}^{\infty} f(x)dx - \int_{F_{\alpha/2}}^{\infty} f(x)dx = 1-\alpha \qquad (2.23)$$

式中：$F_{1-\alpha/2}$与$F_{\alpha/2}$的乘积为 1。

若$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，则由(2.21)和(2.23)式得对应公式：

$$F_{1-\alpha/2} \le \hat{\sigma}_1^2 \Big/ \hat{\sigma}_2^2 < F_{\alpha/2} \qquad (2.24)$$

例：N(0, σ)--测量仪器；α --被测工件(或标准试样)。

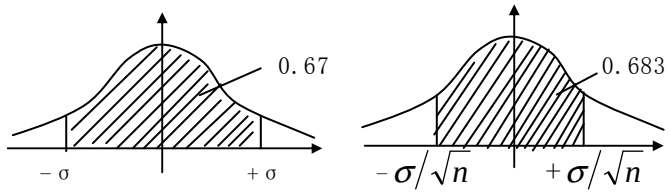
1)当α为未知时，而仪器的σ值为已知

a)一次测量真值α的工件得 X_1，$\hat{a} = x_1$，$\hat{a}$的标准偏差为σ。$\hat{a}$接近真值的程度为 67%的可能性$|\hat{a} - a|$不大于$\hat{\sigma}$。

b)n 次测量真值为α的工件，得到一组测量结果 $x_1, x_2 \cdots\cdots x_n$，

$$\hat{a} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

$\hat{a}$为α的估值，$\hat{a}$的标准差为$\sigma_{\hat{a}} = \sigma/\sqrt{n}$，$\hat{a}$接近真值α的程度为 68.3%的可能性$|\hat{a} - a|$不大于$\sigma/\sqrt{n}$。



a)一次测量　　b)n 次测量

图 2.5 估值$\hat{a}$的置信区间估值

2)当σ未知，α为已知

a)n 次测量真值为α的试样,得到一组测量结果：$x_1, x_2 \cdots\cdots x_n$，仪器的标准偏差为：

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n-1}\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}\text{，其中：}\ \hat{a} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

或者:

$$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sqrt{\sum(x_i-a)^2}$$

b)用 t 分布来衡量其置信水平:

当 α =0.01，即 1-α =0.99 时，k=13。即当测量次数为 n=k+1=14 时，由 Δ =3$\hat{\sigma}_{14}$给出的区间的概率为 0.99(即从统计上来说,作 100 次测量，其中 99 次的数据偏差$|x_i-a|$可能落在 3$\hat{\sigma}_{14}$之内，有一次可能落到 3$\hat{\sigma}_{14}$区间之外)。

当 α =0.05，即 1-α =0.95 时，k=3。即当测量次数为 n=k+1=4 时，由 Δ =3$\hat{\sigma}_4$给出的区间的概率为 0.95(即从统计上来说，作 100 次测量,其中 95 次的数据$|x_i-a|$可能落在 3$\hat{\sigma}_4$之内，有一次可能落到 3$\hat{\sigma}_4$区间之外)。

2.5 仪器误差的分析方法

在计量和测量仪器的设计中,首先会遇到以下二类误差分析问题：一是间接测量中误差的传递；二是多种误差因子造成的仪器误差。第一类问题要研究误差的分析方法，第二类问题要研究误差的综合。本节内容为仪器误差的几种分析方法，下一节将讲述仪器误差的综合。

2.5.1 微分法(误差的独立作用原理)

设： $X=f(x_1,x_2,x_3\cdots\cdots x_n)$，

则： $dx=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$。

当各项误差为小量，忽略高阶小量，则有：

$$\Delta x=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n。$$

当X_i彼此独立，不相关，无系统误差：$\mu_1=\mu_2=\cdots\cdots\mu_n=0$，$\sigma_1,\sigma_2,\cdots\cdots\sigma_n$彼此相差不大时，根据概率论大数定律可以直接写出：

$$\sigma_x=\sqrt{(\partial f/\partial x_1)^2\sigma_{x_1}^2+(\partial f/\partial x_2)^2\sigma_{x_2}^2+\cdots\cdots+(\partial f/\partial x_n)^2\sigma_n^2}\quad(2.25)$$

例：计算航空相机，像面上像移速度的估值偏差。

设像面上像移速度为：

$$V_p = \frac{V}{H} \cdot f \text{ 。}$$

则：

$$\Delta V_P = \frac{\partial V_p}{\partial V}\Delta V + \frac{\partial V_p}{\partial f}\Delta f + \frac{\partial V_p}{\partial H}\Delta H$$

$$= \frac{f}{H}\Delta V + \frac{V}{H}\Delta f + \frac{Vf}{H^2}\Delta H \quad ,$$

有：$$\frac{\Delta V_p}{V} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta H}{H} \text{ 。}$$

当ΔV、ΔH、Δf 相互独立，不相关，数值相差不大时：

$$\frac{\sigma_{\Delta V_p}}{V_p} = \sqrt{(\frac{\sigma_V}{V})^2 + (\frac{\sigma_f}{f})^2 + (\frac{\sigma_H}{H})^2}$$

微分法的优点是运用高等数学解决了其它方法难以解决的计算问题。但微分法也具有局限性，不少误差不能用微分法计算或很难计算，如仪器中常遇到的测杆间隙误差，就不能用微分法求得。

2.5.2 几何法

利用几何图形找出误差源造成的误差,求出它们之间的数值和方向关系。

几何法的优点是简单、直观、但应用在复杂机构上则较为困难。

2.5.3 逐步投影法(光电跟踪系统三轴误差分析)

这种方法是将主动件的某原始误差先投影到与其相关的中间构件上，然后再从该中间构件投影到下一个与其有关的中间构件上去，最终投影到机构从动件上，求出机构位置误差。

2.5.4 作用线与瞬时臂法(详查相机像移补偿残差分析)

上述各种计算方法都是直接导出误差源的原始误差和示

值误差的关系，而没有分析原始误差作用的中间过程。有些原始误差的影响不能直接导出答案。瞬时臂法就是研究机构或系统传递运动的过程，并分析原始误差怎样伴随运动的传递过程而伟到示值上去(或系统的输出)，从而造成示值误差(或系统的输出误差)。

2.6 仪器误差的综合

2.6.1 方差合成原理合成随机误差

经过分析，一台仪器的某个技术参数的测量误差与 m 个误差因素 X_j 有关，实际上 m 个误差因素即 m 个随机变量，各自有其概率密度分布，可以用这 m 个随机变量的和：$X=\sum_{j=1}^{m}X_j$，组成一个新的随机变量，即该技术参数的测量误差。随机误差的合成我们可以直接写出该技术参数均方差公式：

$$\sigma_x=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sigma_j^2+2\sum_{1\le j\ne k\le m}^{m}p_{jk}\sigma_j\sigma_k} \tag{2.26}$$

当 X_j 之间彼此独立、不相关时：

$$\sigma_x=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sigma_j^2} \tag{2.27}$$

其中：σ_j—X_j 的均方偏差;

p_{jk}—X_j 与 X_k(j≠k)的相关系数:

$$P_{jk}=\frac{C_{ov}(x_j,x_k)}{\sigma_j\cdot\sigma_k}=\frac{E\{[x_j-E(x_j)][x_k-E(x_k)]\}}{\sqrt{E\{[x_j-E(x_j)]^2\}E\{[x_k-E(x_k)]^2\}}}$$

(2.28)

其中：$C_{0V}(x_j,x_k)$—X_j、X_k 的协方差(或称相关矩;

E(•)表示(•)的数学期望。

2.6.2 直接卷积合成(数值计算)随机误差

当误差项目不多，而误差项目中非正态分布的误差又很大，虽然各误差项之间彼此相互独立，还是不能用方差合成原理，即(2.26)和(2.27)式来合成，这时可以直接用卷积合

成随机误差，以下通过一个实例来说明此方法。

某个活动基地上的光电定向系统其方位定向误差与21项误差因素有关，其误差项目名称、误差概率密度分布性质，及其统计量的量值综合于表2.9。从表2.9可以看出，21项误差可以分为二类，一类是传递误差；另一类是测量误差。其方位的总误差应为：

$$\Delta = \Delta_{传} + \Delta_{测} \tag{2.29}$$

$\Delta_{传}$方位传递误差，对于其中每一项来说，制造和装调是随机性的，而一经制造和装调完成后应是系统误差，但这些方位传递误差的组合应是一随机过程。从目前的具体情况来看，项目多(10 项)，并且误差的数值相差不大，组合后误差分布应为正态分布：

$$\Delta_{传} = c_{传} \cdot \sigma_{传} \tag{2.30}$$

其中：$c_{传} = 3$

而传递误差的均方偏差为:

$$\sigma_{传} = \sqrt{\sum \sigma_i^2} = 11.3'',$$

其中：$i = 3,4,5,7,8,9,18,19,20,21$，

$$\Delta_{传} = 3 \times 11.3 = 33.9''。$$

$\Delta_{测}$为测量误差，对于每一项测量误差来说为随机性的，这些测量误差的总合应是随机性的。其中探测器分辨力凑整误差为均匀分布：

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 1/2a & -a \leqslant x_1 \leqslant a \\ 0 & a < |x_1| \end{cases} \tag{2.31}$$

其中：a=45″

艇横摇形成光轴相对扭转而造成的测量误差为反余弦分布:

$$f_2(x_2)=\begin{cases}1/\pi\sqrt{b^2-x_2} & -b<x_2<b \\ 0 & b\leqslant|x_2|\end{cases} \tag{2.32}$$

其中：$b\approx41''$。

其余各项测量误差，由于数值小，量级相当，项目足够多，合成后应为正态分布：

$$f_3(x_3)=\frac{1}{\sigma_{x3}\sqrt{2\pi}}e^{-x_3/2\sigma_{x3}^2}$$

$\Delta_{测}$可归结为求出$X=x_1+x_2+x_3$三个随机变量和的分布密度。

由于：$f(x)=[f_1(x_1)*f_2(x_2)]*f_3(x_3)$

$$=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)\cdot f_3(x-x_1-x_2)dx_1dx_2 \quad (2.33)$$

化为离散值(求和)计算：

$$g(kt)=\sum_{-a}^{a}\sum_{-b}^{b}\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{b^2-x_2^2}}\cdot\frac{1}{\sigma_{x3}\sqrt{2\pi}}e^{-(x-x_1-x_2)^2/2\sigma_{x3}^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi a\sqrt{2\pi}\sigma_{x3}}\sum_{-a}^{a}\sum_{-b}^{b}\frac{1}{\sqrt{b^2-x_2^2}}e^{-(x-x_1-x_2)/2\sigma_{x3}^2} \quad (2.34)$$

其中：a=45″，b=41″，σ_{X3}=13″，步长 t=1″。

将 g(kt)的值列表，X=kt 值计算到 k=129 步时，g(129)=0，大于 129 步可以不计算。计算结果见表 2.10，测量误差概率密度分布曲线见图 2.6。测量误差的极限误差$\Delta_{测}$按α=0.003，P(kt＜$\Delta_{测}$)＝≤1-α=99.7%来确定，即：

$$p(kt<\Delta_{测})=2\sum_{1}^{k}g(kt)\le 99.7\% \quad (2.35)$$

当 kt=97 时，P=0.002966，$\Delta_{测}$=±96″。光电定向仪的极限误差为:

$$\Delta=\Delta_{传}+\Delta_{测}=129.9''。$$

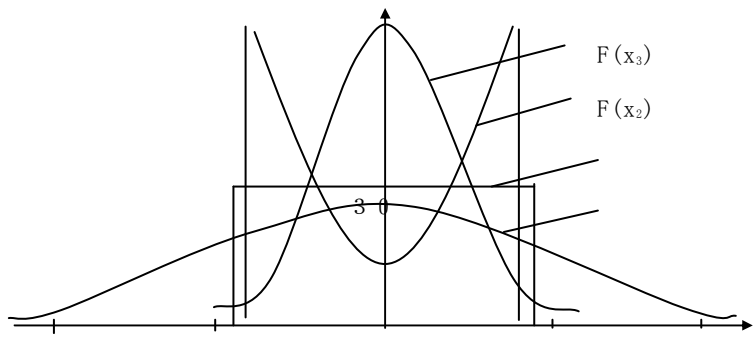

F(x3)
F(x2)
3σ



图 2.6 合成后的测量误差概率密度分布曲线

2.6.3 系统误差的合成

1)代数和法合成已定系统误差:

$$\Delta = \frac{\partial F}{\partial x_1}\Delta_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\Delta_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\Delta_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\Delta_i \quad (2.36)$$

其中：Δ_i 是误差的大小和方向已知的系统误差。

2)绝对和法合成未定系统误差:

$$\Delta = \left|\frac{\partial F}{\partial x_1}e_1\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial x_2}e_2\right| + \cdots\cdots + \left|\frac{\partial F}{\partial x_n}e_n\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}e_i\right| \quad (2.37)$$

其中：e_i 为误差的大小或方向未定的系统误差。

3)方和根法合成未定系统误差：

$$\Delta = [\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial F}{\partial x_i}e_i)^2]^{1/2} \quad (2.38)$$

其中：e_i 为误差的大小或方向未定的系统误差。

2.6.4 不同性质误差的合成

1)已定系统误差和随机误差的合成

$$\Delta = \sum_{i=1}^{r}\Delta_i \pm c\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\delta_i / c_i)^2} \quad (3.39)$$

其中：Δ_i—已定系统误差，r 个；

δ_i—随机误差，n 个，$\delta_i = C_i \sigma_i$。

2)随机误差与已定系统误差和未定系统误差的合成:

$$\Delta=\sum_{j=1}^{r}\Delta_j+\sum_{i=1}^{m}|e_i|\pm c_s\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\delta_i/c_i)^2} \tag{2.40}$$

或:

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\pm c_{s1}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(e_i/c_i)^2}\pm c_{s2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\delta_i/c_i)^2} \tag{2.41}$$

2.6.5 蒙特卡洛法合成

高分辩力的航空和航天画幅式摄影相机或是应用 TDICCD 的推扫相机，要想得清晰的图像，必须解决的一个重要技术是高精度的像移补偿。而实现高精度的像移补偿首先要获得高精度的像移速度矢。在这里通过应用蒙特卡洛法分析星载相机像移速度矢误差的实例来讲解蒙特卡洛合成法。

星载相机对星下点进行摄影或摄像时，地面景物各点在相机像面上的像移公式如下(本节公式中，均用 S 代表 sin；C 代表 cos)：

$$\begin{aligned}V_{P1}=dP_1/dt\Big|_{t=0}=&\frac{f}{H-h}[\Omega(R+h)-\omega(R+h)Ci_0-g_2\omega Si_0S\gamma_0]\\&C\theta_0C\psi_0-\frac{f}{H-h}[\omega(R+h)Si_0C\gamma_0-g_1\omega Si_0S\gamma_0]C\theta_0S\psi_0\\&-\frac{f}{H-h}[g_1\Omega-g_1\omega Ci_0-g_2\omega Si_0C\gamma_0]S\theta_0\\&+\frac{g_1f}{H-h}(\dot\theta S\theta_0C\psi_0+\dot\psi C\theta_0S\psi_0)\\&+\frac{g_2f}{H-h}(\dot\theta S\theta_0S\psi_0-\dot\psi C\theta_0C\psi_0)+f\dot\theta C\theta_0\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}V_{P2}=dP_2/dt\Big|_{t=0}=&\frac{f}{H-h}[\Omega(R+h)-\omega(R+h)Ci_0-g_2\omega Si_0S\gamma_0]\\&(-C\varphi_0S\psi_0+S\varphi_0S\theta_0C\psi_0)-\frac{f}{H-h}[\omega(R+h)Si_0C\gamma_0\\&-g_1\omega Si_0S\gamma_0](C\varphi_0C\psi_0+S\varphi_0S\theta_0S\psi_0)-\frac{f}{H-h}(g_1\Omega\\&-g_1\omega Ci_0-g_2\omega Si_0C\gamma_0)C\varphi_0C\theta_0-\frac{g_1f}{H-h}[\dot\varphi(S\varphi_0S\psi_0\\&+C\varphi_0S\theta_0C\psi_0)+\dot\theta S\varphi_0C\theta_0C\psi_0-\dot\psi(C\varphi_0C\psi_0+S\varphi_0S\theta_0S\psi_0)]\\&+\frac{g_2f}{H-h}[\dot\varphi(S\varphi_0C\psi_0-C\varphi_0S\theta_0S\psi_0)-\dot\theta S\varphi_0C\theta_0S\psi_0\\&+\dot\psi(C\varphi_0S\psi_0-S\varphi_0S\theta_0C\psi_0)]+f(\dot\varphi C\varphi_0C\theta_0-\dot\theta S\varphi_0S\psi_0)\end{aligned}$$

(2.43a)

由于φ_0和θ_0为小量，忽略高价小量项$S\varphi_0 \cdot S\theta_0$后，方程(2.43a)可简化为:

$$V_{P2} = dP_1 / dt\Big|_{t=0} = \frac{-f}{H-h}[\Omega(R+h) - \omega(R+h)Ci_0 - g_2\omega Si_0 S\gamma_0]$$

$$C\varphi_0 S\psi_0 - \frac{f}{H-h}[\omega(R+h)Si_0 C\gamma_0 - g_1\omega Si_0 S\gamma_0]$$

$$C\varphi_0 C\psi_0 - \frac{f}{H-h}(g_1\Omega - g_1\omega Ci_0 - g_2\omega Si_0 C\gamma_0)C\varphi_0 C\theta_0$$

$$-\frac{g_1 f}{H-h}[\dot{\varphi}(S\varphi_0 S\psi_0 + C\varphi_0 S\theta_0 C\psi_0) + \dot{\theta}S\varphi_0 C\theta_0 C\psi_0$$

$$-\dot{\psi}C\varphi_0 C\psi_0] + \frac{g_2 f}{H-h}[\dot{\varphi}(S\varphi_0 C\psi_0 - C\varphi_0 S\theta_0 S\psi_0)$$

$$-\dot{\theta}S\varphi_0 C\theta_0 S\psi_0 + \dot{\psi}C\varphi_0 S\psi_0] + f\dot{\varphi}C\varphi_0 C\theta_0 \quad (2.4.3b)$$

而像移速度主向量值和偏流角如下:

$$V_P = \sqrt{V_{P1}^2 + V_{P2}^2} \quad (2.44)$$

$$\beta_P = \arctan(V_{P2} / V_{P1}) \quad (2.45)$$

其中：

R—相对于地心的地球半径(km)；

H—被摄景物处，飞船的轨道高度(km)；

h—被摄景物的地物地形高度(km)；

H-h—被摄景物处飞船的真高度(km)；

R+H—相对于地心，飞船的轨道高度(km)；

R+h—被摄景物处，地物的地心距(km)；

i_0—轨道倾角(轨道平面和地球赤道平面间的夹角)，i_0=43°；

γ_0—在摄影时刻，在轨道平面内，飞船到降交点(飞船轨道平面在下行段与赤道的交点)之间所对应的中心角，当飞船轨道下行(由北向南)时：

λ 南纬、$\gamma_0 = \arcsin(\sin\lambda / \sin i_0)$，

λ 北纬、$\gamma_0 = -\arcsin(\sin\lambda / \sin i_0)$，

当飞船轨道上行时：

λ 南纬、$\gamma_0 = 180^0 - \arcsin(\sin\lambda / \sin i_0)$，

λ 北纬、$\gamma_0 = 180^0 + \arcsin(\sin\lambda / \sin i_0)$；

λ、α—在地心地球坐标系中，飞船星下点的经度和纬度；

ω—地球自转角速率 7.2722×10^{-5}1/s；

Ω —在摄影时刻，飞船轨道运动，相对地心的角速率(1/s)；

V_S —在摄影时刻，飞船轨道运动在地平方向的运动速度，$V_S=\Omega(R+H)$，(km/s)；

$\psi_0,\theta_0,\varphi_0$—分别为飞船坐标系相对于轨道坐标系在摄影时刻的偏航、俯仰和横滚姿态角；

$\dot{\psi},\dot{\theta},\dot{\varphi}$ —分别为飞船坐标系相对于轨道坐标系的偏航、俯仰和横滚角速率；

$\psi_{\max},\theta_{\max},\varphi_{\max}$—飞船三轴姿态角的最大值，$|\psi_{\max}|=0.7^0$，$|\theta_{\max}|=|\varphi_{\max}|=0.5^0$；

$\dot{\psi}_{\max},\dot{\theta}_{\max},\dot{\varphi}_{\max}$—飞船三轴姿态角的最大值，$|\psi_{\max}|=|\theta_{\max}|=|\varphi_{\max}|=0.02^0/s$；

f—相机镜头焦距(mm)；

g_1,g_2—在摄影时刻，相机视场光栏中心对应的地理点在地理坐标系 G 的前向和侧向距离(km)；

$$\left.\begin{aligned} g_1&=(H-h)\left(\frac{-S\varphi_0C\theta_0}{C\varphi_0C\psi_0}-\frac{S\theta_0}{C\theta_0S\psi_0}\right)/\left(\frac{C\psi_0}{S\psi_0}+\frac{S\psi_0}{C\psi_0}\right)\\ g_2&=(H-h)\left(\frac{S\varphi_0C\theta_0}{C\varphi_0S\psi_0}-\frac{S\theta_0}{C\theta_0C\psi_0}\right)/\left(\frac{S\psi_0}{C\psi_0}+\frac{C\psi_0}{S\psi_0}\right)\end{aligned}\right\}(2.46)$$

V_{P1},V_{P2}—分别为相机像面上前向和横向像移速度(mm/s)；

V_P—相机像面上像移速度主向量值(mm/s)；

β_P—相机像面上像移速度主向量在相面坐标系内与 P_1 轴的夹角一偏流角；

$\sigma_{VS}=0.01km/s$—给出的飞船速度允许误差；

$\sigma_{H-h}=0.1km$ —飞船真高度的允许误差；

$\sigma_{R+H}=0.08km$—飞船的地心轨道高度的允许误差；

$\sigma_{R+h}=0.05km$—地物地心距的允许误差；

$\sigma_\lambda=\sigma_a=3km$ —分别为星下点纬度和经度给出值的允许误差(相当于 0.027°)；

$\sigma_\psi=\sigma_\theta=\sigma_\varphi=0.05^0$—飞船偏航、俯仰和横滚姿态角允许的测量误差；

$\sigma_{\dot{\psi}}=\sigma_{\dot{\theta}}=\sigma_{\dot{\varphi}}=0.002^0/s$—飞船偏航、俯仰和横滚姿态角速率允许的测量误差；

$\sigma_f = 1.35mm$—相机镜头焦距值的允许测量误差。

按理V_{P1}、V_{P2}、V_P和β_P解析式已有，σ_{VS}、σ_{H-h}、σ_{R+h}、σ_λ、σ_ψ、σ_θ、σ_φ、$\sigma_{\dot\psi}$、$\sigma_{\dot\theta}$、$\sigma_{\dot\varphi}$和σ_f11 个随机变量(误差项)的概率密度分布形式和均方偏差已经给出，完全可以应用全微分法来求出合成后的V_{P1}、V_{P2}、V_P和β_P的均方偏差，来估计像移速度的误差。

但不难想像，如此复杂的解析式用全微分法将会遇到不可克服的困难，因此逼迫我们寻求一种新的计算方法—蒙特卡洛法(统计试验法)来进行误差的合成。

合成步骤如下:

1)如表`2.11，对应公式中的 11 个随机变量产生 17 个伪随机数序列$S_{i,j}$，$i=1,2,\cdots\cdots n$(n 为计算采样数，一个比较大的数)；$j=1,2\cdots\cdots m$(m=17，即 17 个伪随机数)。公式中，i_0、ω为常数，而γ_0的误差已经在α的误差中考虑，故不重复计算。

表 2.11 参数误差的随机数计算表

序号 I、j	均匀分布随机数矩阵 $S_{I,j}$	归一化正态分布随机数矩阵 $T_{i,j}$	各参数的随机误差
1	$S_{i,1}$		$\Phi_0=2(S_{i,1}-0.5)\Phi_{max}$
2	$S_{i,2}$		$\theta_0=2(S_{i,2}-0.5)\theta_{max}$
3	$S_{i,3}$		$\Psi_0=2(S_{i,3}-0.5)\Psi_{max}$
4	$S_{i,4}$		$\dot\varphi=2(S_{i,1}-0.5)\dot\varphi_{max}$
5	$S_{i,5}$		$\dot\theta=2(S_{i,2}-0.5)\dot\theta_{max}$
6	$S_{i,6}$		$\dot\psi=2(S_{i,3}-0.5)\dot\psi_{max}$
7		$T_{i,7}$	$\Delta V_S=Sign(\bullet)\ T_{i,7}\bullet\sigma_{VS}$
8		$T_{i,8}$	$\Delta(H-h)=Sign(\bullet)\ T_{i,8}\bullet\sigma_{H-h}$
9		$T_{i,9}$	$\Delta(R+h)=Sign(\bullet)\ T_{i,9}\bullet\sigma_{R+h}$
10		$T_{i,10}$	$\Delta\alpha=Sign(\bullet)\ T_{i,10}\bullet\sigma_\alpha$
11		$T_{i,11}$	$\Delta f=Sign(\bullet)\ T_{i,11}\bullet\sigma_f$
12		$T_{i,12}$	$\Delta\Phi=Sign(\bullet)\ T_{i,12}\bullet\sigma_\Phi$
13		$T_{i,13}$	$\Delta\theta=Sign(\bullet)\ T_{i,13}\bullet\sigma_\theta$
14		$T_{i,14}$	$\Delta\Psi=Sign(\bullet)\ T_{i,14}\bullet\sigma_\Psi$
15		$T_{i,15}$	$\Delta\dot\varphi=Sign(\bullet)\ T_{i,15}\bullet\sigma_{\dot\varphi}$
16		$T_{i,16}$	$\Delta\dot\theta=Sign(\bullet)\ T_{i,16}\bullet\sigma_{\dot\theta}$
17		$T_{i,17}$	$\Delta\dot\psi=Sign(\bullet)\ T_{i,17}\bullet\sigma_{\dot\psi}$

17 个随机变量中，φ_0、θ_0、ψ_0 、$\dot{\varphi}$、$\dot{\theta}$和$\dot{\psi}$6 个变量为均匀分布，因此产生均匀分布随机数矩阵 $S_{i,j}$，其中：$i=1,2,\cdots\cdots n$（n 是一个比较大的数，即计算采样数）；$j=1,2\cdots\cdots 6$。而其余的 11 个随机变量为正态分布，因此产生归一化正态分布随机数 $T_{i,j}$，其中 $i=1,2,\cdots\cdots n$；$j=7,8\cdots\cdots 17$。

2)将表 2.11 中 $i=1$ 的 $\varphi_{0(i=1)}$、$\theta_{0(i=1)}$、$\psi_{0(i=1)}$、$\dot{\varphi}_{0(i=1)}$、$\dot{\theta}_{0(i=1)}$和 $\dot{\psi}_{0(i=1)}$ 的值，以及公式(2.42)和(2.43b)中其余参数某一时刻 $t_{(i=1)}$ 的值 $V_{S(i=1)}$、$(H-h)_{(i=1)}$、$(R+h)_{(i=1)}$、$f_{(i=1)}$，以及 i_0、γ_0 和 ω 共 13 个参数值代入(2.42)、(2.43b)、(2.46)、(2.44)和(2.45)式，可以获得 $i=1$，即第一个采样点的 $V_{P(i=1)}$ 和 $\beta_{P(i=1)}$。

3)将表 2.11 中 $i=1$ 的 $(\varphi_{0(i=1)}+\Delta\varphi_{(i=1)})$、$(\theta_{0(i=1)}+\Delta\theta_{(i=1)})$、$(\psi_{0(i=1)}+\Delta\psi_{(i=1)})$、$(\dot{\varphi}_{0(i=1)}+\Delta\dot{\varphi}_{(i=1)})$、$(\dot{\theta}_{0(i=1)}+\Delta\dot{\theta}_{(i=1)})$、和 $(\dot{\psi}_{0(i=1)}+\Delta\dot{\psi}_{(i=1)})$ 的值，$(V_{S(i=1)}+\Delta V_{S(i=1)})$、$[(H-h)_{(i=1)}+\Delta(H-h)_{(i=1)}]$、$[(R+h)_{(i=1)}+\Delta(R+h)_{(i=1)}]$、$(f_{(i=1)}+\Delta f_{(i=1)})$和$(\gamma_{0(i=1)}+\Delta\gamma_{0(i=1)})$的值，以及 i_0、ω 共 13 个参数值代入(2.42)、(2.43b)、(2.46)、(2.44)和(2.45)式，可以获得 $t_{(i=1)}$ 时刻的 $(V_p+\Delta V_p)_{(i=1)}$ 和 $(\beta_p+\Delta\beta_p)_{(i=1)}$ 的值。由此可得：

$$\Delta V_{p(i=1)}=(V_p+\Delta V_p)_{(i=1)}-V_{p(i=1)} \tag{2.47}$$

$$\Delta\beta_{p(i=1)}=(\beta_p+\Delta\beta_p)_{(i=1)}-\beta_{p(i=1)} \tag{2.48}$$

4)根据摄影周期，将 $\gamma_{0(i=1)}$ 增加一个增量，即增加卫星轨道运动增加的中心角得到 $\gamma_{0(i=2)}$，同时将表 2.11 中 $i=2$，$j=1,2\cdots\cdots 17$ 的 17 个随机数按步骤 b)、c)计算，获得 $\Delta V_{p(i=2)}$ 和 $\Delta\beta_{p(i=2)}$。

5)重复以上步骤，最终可以获得两组 ΔV_p 和 $\Delta\beta_p$ 合成误差的数列，即两组合成误差的样本：

$\Delta V_{p(i=1)}$、$\Delta V_{p(i=2)}$、……、$\Delta V_{p(i=n)}$；

$\Delta\beta_{p(i=1)}$、$\Delta\beta_{p(i=2)}$、……、$\Delta\beta_{p(i=n)}$。

通过对这两组样本进行统计分析，可以获得合成误差的

统计特性。

表 2.12 为各参数随机波动产生的误差ΔV_p区间概率分布情况，即ΔV_p的统计直方图。表 2.13 为在不同的摄影曝光时间 t 下，$\Delta V_p \cdot t$不大于总体分配的允许值 0.0012mm 之内的概率数。表中概率超过置信因子 C=3 时的概率 99.7%，原因可能是采样点仅为 1800 个。表 2.14 为$\Delta\beta_p$的统计直方图。

表 2.12 ΔV_p区间概率分布表

像移速度的变化范围 mm/s	-0.5 | -0.4	-0.4 | -0.3	-0.3 | -0.2	-0.2 | -0.1	-0.1 | 0	0 | 0.1	0.1 | 0.2	0.2 | 0.3	0.3 | 0.4	0.4 | 0.5
概率%	0.9	0.89	5.94	16.67	28.5	25.11	16.5	5.4	0.78	0.16

表 2.13 ΔV_p小于允许值的概率表

曝光时间(s)	1/100	1/150	1/200	1/250	1/300	1/350	1/400
概率%	81.83	91.11	96.9	99.1	99.83	99.89	99.89

表 2.14 $\Delta \beta_p$区间概率分布表

偏流角的变化范围(∘)	-0.04 | -0.03	-0.03 | -0.02	-0.02 | -0.01	-0.01 | 0	0 | 0.01	0.01 | 0.02	0.02 | 0.03	0.03 | 0.04
概率%	0.22	2.22	13	32.33	33.17	16.5	2.33	0.22

2.6.6 信号流动图法合成

在海上鉴定、测试弹载平台的原始方位和调平精度，这是个比较复杂的问题。测试过程中，待测参数多，动用各类光测设备多，数据处理和测试方案本身的误差分析和计算很繁复。在实际的工程中，我们应用流动图的方法，对鉴定测试中的主要参数和测试中各类光测设备的测量误差对被鉴定的弹载平台原始方位和调平精度的影响作了分析，并给出了它们的计算公式。希望简便、直观地推导出计算公式，避免求解一系列繁复的微分方程。在本教材中应用部分分析材料来讲解信号流动图法进行误差合成的方法。

1)符号说明

$OE_xE_yE_z$—固定在地球表面一点的地理坐标系，E_z指向天顶，E_y指向目标并与E_z正交，E_y E_z与射面重合，E_x与

E_y、E_z正交，构成右手系。

$OS_xS_yS_z$— 固定在艇体上的艇体坐标系，S_y为纵轴，S_x S_y构成艇甲板平面，S_z与S_x、S_y正交，构成右手系。

$OT_xT_yT_z$ — 固定于 KΦT 摄影经纬仪视轴上的跟踪器坐标系，T_y为视轴，T_x与水平轴重合，T_z轴与T_x、T_y轴正交，构成右手系。

$OT_x'T_y'T_z'$— 跟随艇体摇摆之后，KΦT 视轴上的跟踪器坐标系。

$OP_xP_yP_z$— 弹载平台台体在地理坐标系内的框架坐标系。原点固定在台体上，P_z为台体轴，指向天顶；P_y为内框架轴，指向射向与P_z正交；P_x轴与P_y、P_z轴正交，构成右手系。

$OP_x'P_y'P_z'$— 假想平台台体跟随艇体摇摆之后的框架坐标系。

$OP_{yx}'P_{yy}'P_{yz}'$— 经过一系列空间坐标转换后，P_{yy}'轴与原台体P_y'轴相重合的框架坐标系。

$OP_{zx}'P_{zy}'P_{zz}'$— 经过一系列空间坐标转换后，P_{zz}'轴与原台体P_z'轴相重合的框架坐标系。

q_1 — 在地理坐标系内，岸标到艇位连线相对理论航向时的艇艏艉线的夹角。

ε_1 — 在地理坐标系内，在艇位处测得的岸标高角。

q_1' — 在艇体坐标系内，KΦT 测得的岸标到艇位连线相对实际航向时的艇艏艉线的夹角。

ε_1' — 在艇体坐标系内，KΦT 测得的岸标高角。

q_0 — 在地理坐标系内，平台台体相对艇理论航向时艇艏艉线夹角。

ε_0 — 在地理坐标系内，平台台体的调平误差。

$q_{y,}\varepsilon_y$ — 在地理坐标系内，平台台体坐标系P_{yy}'轴的方位角和高角。

$q_z\varepsilon_z$ — 在地理坐标系内，平台台体坐标系P_{zz}'轴的方位角和高角(其中$q_y = q_0, \varepsilon_z = \varepsilon_0$)。

δq_1 — q_1的测量误差角。

$\delta\varepsilon_1$ — ε_1的测量误差角。

δq_0(或δq_y)— q_0的测量误差。

$\delta\varepsilon_0$(或$\delta\varepsilon_z$) —ε_0的测量误差。

$\Delta q, \Delta\varepsilon$ — 在艇体坐标系内，KΦT测量岸标的舷角(即岸标到艇位连线相对实际艇艏艉线的夹角)和高角的测量误差角。

Δq_0 — KΦT在艇体上的方位安装误差。

λ, ψ, α — 在地理坐标系内，测得的平台台体坐标系的纵摇角、横摇角和方位角。

$\delta_\lambda, \delta_\psi, \delta_\alpha$— λ、ψ和α的测量误差角。

λ', ψ', α' — 在艇体坐标系内，测得的平台台体坐标系的纵摇角、横摇角和方位角。

$\Delta\lambda', \Delta\psi', \Delta\alpha'$— λ'、ψ'和α'的测量误差角。

θ, φ — 在地理坐标系内，艇体坐标系的横摇角和纵摇角。

$\Delta\theta, \Delta\varphi$ — 在地理坐标系内，艇体坐标系的横摇角和纵摇角的测量误差。

S_{xx}, S_{yx}, S_{zx}— 平台坐标系P'_x轴在艇体坐标系$OS_xS_yS_z$三轴上投影。

S_{xy}, S_{yy}, S_{zy}— 平台坐标系P'_y轴在艇体坐标系$OS_xS_yS_z$三轴上投影。

S_{xz}, S_{yz}, S_{zz}— 平台坐标系P'_z轴在艇体坐标系$OS_xS_yS_z$三轴上投影。

P_{xy}, P_{xz}— 沿艇体坐标系S_x轴放置的照相测角仪坐标系的相面坐标。

P_{yx}, P_{yz}— 沿艇体坐标系S_y轴放置的照相测角仪坐标系的相面坐标。

P_{zx}, P_{zy}— 沿艇体坐标系S_z轴放置的照相测角仪坐标系的相面坐标。

f_x, f_y, f_z— 沿S_x、S_y和S_z三轴布置的三台照相测角仪焦距。

$\Delta S_{yx}\Delta S_{zx}$

$\Delta S_{xy}\Delta S_{zy}$ — 照相测角仪的测量误差(其中包括安装误差)。

$\Delta S_{xy}\Delta S_{yz}$

2)测试方案介绍

为了阅读方便，首先简单地介绍鉴定、测试方案。其基本思想是在发射筒顶端安装一个双层支架，支架上层安装KΦT摄影经纬仪，下层安装待测平台和两台照相测角仪。KΦT用来拍摄岸标，测量岸标到艇位连线相对实际航向时艇艏艉线夹角q_1'，以及岸标相对艇甲板平面的高低角ε_1'。照相测角仪用来测量记录待测平台相对艇体的方位角α'，横摇角ψ'，纵摇角λ'。

岸标处架设一台电影经纬仪，测量岸标和艇位连线与真北方向间的夹角q_2。岸上同时还架设电影经纬仪若干台，测量艇位(ψ_1和λ_1)。

艇 915 惯导测量艇体坐标系相对地理坐标系的横摇角 θ 和纵摇角 Φ。

上述的全部测试设备由统一时统控制、实时记录。平台台体原始方位精度测试原理如图 2.7。

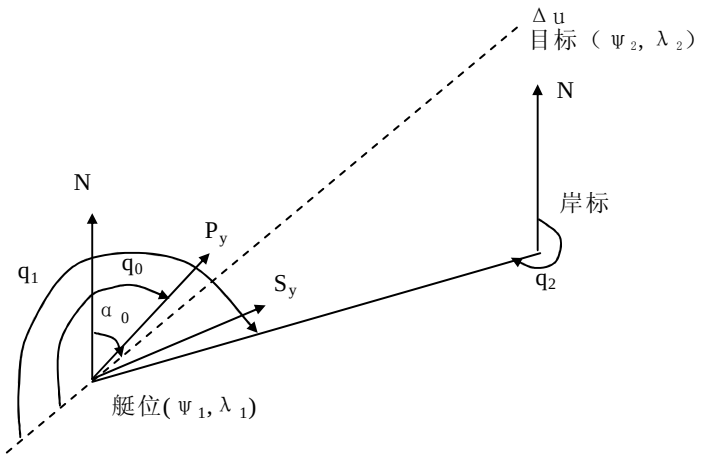


图 2.7 平台台体原始方位精度测试原理

其中：N— 正北方向；

P_y— 平台台体在地理坐标系内的方位指向；

S_y— 艇体坐标系在地理坐标系内的方位指向；

q_1— 在地理坐标系内，岸标到艇位连线相对理论航向时艇艏艉线的夹角；

q_0— 平台台体在地理坐标系内相对理论航向时艇艏艉线的夹角；

α_0— 平台台体相对正北方向的夹角。

平台台体相对正北方向夹角的理论值，可以根据艇和目标 u 两地的地理位置(ψ_1,λ_1)、(ψ_2,λ_2)和两地海拔高度h_1和h_2求得。而α_0的测量值(或称实际值)可用下式求出：

$$\alpha_{0测}=q_2+180^\circ-(q_1-q_0)+\gamma+\Delta\alpha_{kp}$$

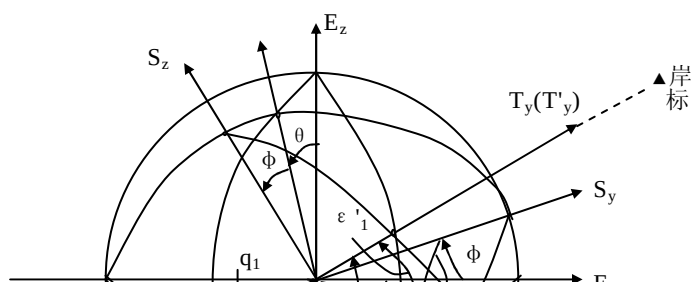
其中：γ— 子午线收敛角；

$\Delta\alpha_{kp}$— 地球曲率修正值。

本文以下的内容是分析如何通过各测量设备获得的测量数据来计算出q_1、q_0、ε_1、ε_0，以及其它确定平台台体原始方位精度和调平精度所需的数据和测试方案中各环节误差(测量误差、安装误差)对测试结果的影响。

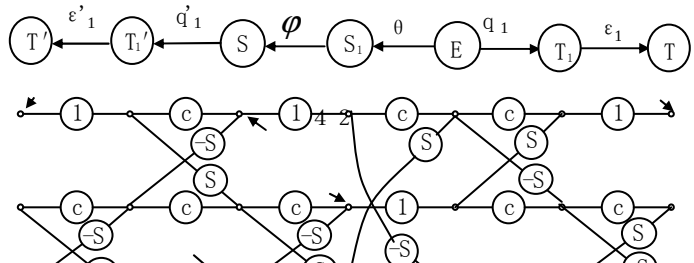
3)在地理坐标系内岸标相对理论航向时艇艏艉线夹角q_1和高角ε_1的计算及其误差计算

如图 2.8 所示，设原始位置时，艇体坐标系$S_xS_yS_z$、KΦT坐标系$T_xT_yT_z$和地理坐标系$E_xE_yE_z$完全重合。首先在地理坐标系内KΦT经纬仪坐标系先绕E_z轴作方位旋转q_1角，后绕T_x轴高低旋转ε_1角，得到$T_xT_yT_z$空间(图内T_z没有画出)使T_y轴指向岸标。



然后以另一种方式，艇体坐标系（KΦT坐标系伴随艇体坐标系）在地理坐标系内绕E_y轴作横摇θ和绕S_x轴作纵摇φ，得艇体空间$S_xS_yS_z$。而后KΦT坐标系在艇体坐标系内，绕S_z轴作方位旋转q_1'和绕T_x'轴作高低旋转ε_1'角，使T_y'轴也指向岸标。得到另一个KΦT空间$T_x'T_y'T_z'$（图中T_z'轴没有画出）。由于T_y轴和T_y'轴都指向岸标，因此要$T_xT_yT_z$和$T_x'T_y'T_z'$两空间彼此重合，只要使$T_x'T_y'T_z'$坐标系绕T_y'轴继续作一个适当的旋转即可。其中旋转的q_1'和ε_1'角，即KΦT在艇体坐标系内测得岸标的方位角和高角；而q_1和ε_1为要求求解的在地理坐标系内岸标相对理论航向时艇艏艉线夹角q_1和岸标高角ε_1。

根据以上坐标系的旋转，可得到图 2.9 所示的信号流动图。



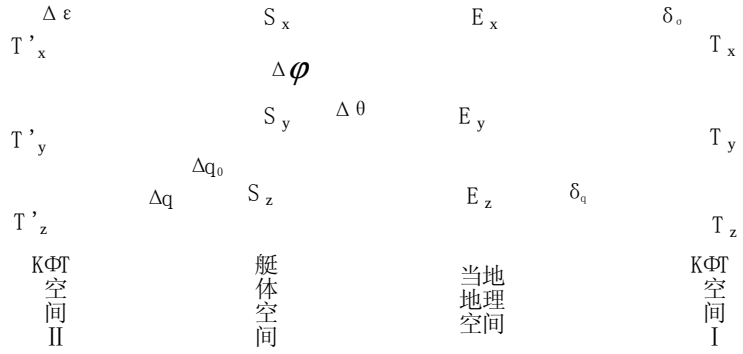


图 2.9 信号流动图

由于T_y'轴和T_y轴重合，都指向岸标，因而T_y和T_y'分别在地理坐标系$E_xE_yE_z$三轴上的投影应相等。根据信号流动图可以直接写出以下等式：

在E_x轴上的投影：

$$\cos\varepsilon_1\sin q_1 = \cos\varepsilon_1'\cos q_1'\cos\theta - \sin\varepsilon_1'\cos\varphi\sin\theta - \cos\varepsilon_1'\cos q_1'\sin\varphi\sin\theta \qquad (2.49.1)$$

在E_y轴上的投影：

$$\cos\varepsilon_1'\cos q_1 = \cos\varepsilon_1'\cos q_1'\cos\varphi - \sin\varepsilon_1\sin\varphi \qquad (2.49.2)$$

在E_z轴上的投影：

$$\sin\varepsilon_1 = \cos\varepsilon_1'\cos q_1'\sin\varphi\cos\theta + \sin\varepsilon_1'\cos\varphi\cos\theta + \cos\varepsilon_1'\sin q_1'\sin\theta \qquad (2.49.3)$$

(2.49.3)式左端仅有ε_1项，由此可求得ε_1为：

$$\varepsilon_1 = \arcsin(\cos\varepsilon_1'\cos q_1'\sin\varphi\cos\theta + \sin\varepsilon_1'\cos\varphi\cos\theta + \cos\varepsilon_1'\sin q_1'\sin\theta) \qquad (2.50)$$

以(2.49.1)式除以(2.49.2)式可求得q_1为：

$$q_1 = \arctan\frac{\cos\varepsilon_1'\sin q_1'\cos\theta - \sin\varepsilon_1'\cos\varphi\sin\theta - \cos\varepsilon_1'\cos q_1'\sin\varphi\sin\theta}{\cos\varepsilon_1'\cos q_1'\cos\varphi - \sin\varepsilon_1'\sin\varphi} \qquad (2.51)$$

把KΦT在艇体上安装时的方位误差Δq_0、KΦT在艇体坐标系内测量岸标的方位角和高角的测量误差Δq、$\Delta\varepsilon$，以及艇

体纵、横摇测量误差$\Delta\varphi$和$\Delta\theta$引入图 2.8 的信号流动图内。

根据信号流动图，可直接求出误差因素造成的q_1角和ε_1角的测量误差值。

由于KΦT在艇体上安装方位误差Δq_0产生的测量误差(属系统误差)应为：

$$\delta q_1 = \Delta q_0 \cos\varphi\cos\theta \qquad (2.52.1)$$

$$\delta\varepsilon_1 = \Delta q_0(\cos\varphi\sin\theta\cos q_1 - \sin\varphi\sin q_1) \qquad (2.52.2)$$

由KΦT测量误差Δq和$\Delta\varepsilon$造成的测量误差应为：

$$\delta q_2 = \Delta q\cos\varphi\cos\theta + \Delta\varepsilon(\sin q_1'\sin\varphi\cos\theta - \cos q_1'\sin\theta)$$

(2.53.1)

$$\delta\varepsilon_2 = \Delta\varepsilon(\cos q_1'\cos\theta\cos q_1 + \sin q_1'\cos\varphi\sin q_1 + \sin q_1'\sin\varphi\sin\theta\cos q_1')$$

$$+ \Delta q(\cos\varphi\sin\theta\cos q_1 - \sin\varphi\sin q_1) \qquad (2.53.2)$$

由艇体纵横摇测量误差$\Delta\varphi$和$\Delta\theta$造成的测量误差为：

$$\delta q_3 = -\Delta\varphi\sin\theta \qquad (2.54.1)$$

$$\delta\varepsilon_3 = \Delta\varphi\cos\theta\cos q_1 + \Delta\theta\sin q_1 \qquad (2.54.2)$$

由(4)、(5)和(6)可得δq和$\delta\varepsilon$：

$$\delta q = \delta q_1 + \sqrt{\delta^2 q_2 + \delta^2 q_3} \qquad (2.55.1)$$

$$\delta\varepsilon = \delta\varepsilon_1 + \sqrt{\delta^2\varepsilon_2 + \delta^2\varepsilon_3} \qquad (2.55.2)$$

本章主要参考书目

[1]肖明耀著,《误差理论与应用》。

[2]赵志祥、周德邻编著,《数据测量和评价工作中的数学处理》原子能出版社。

[3]薛实福、李庆祥编著,《精密仪器设计》清华大学出版社,1991年8月第1版。

[4]杨惠连,张涛编著,《误差理论与数据处理》天津大学出版社,1992年8月。

[5]浙江大学数学系高等数学教研组编,《概率论与数理统计》,高等教育出版社,1979年3月第一版,1984年月10月第十次印刷。

[6]王家骐,《0九-2》工程巨浪1号光电瞄准仪设计报告》,长春光学精密机械研究所内部报告,1976年。

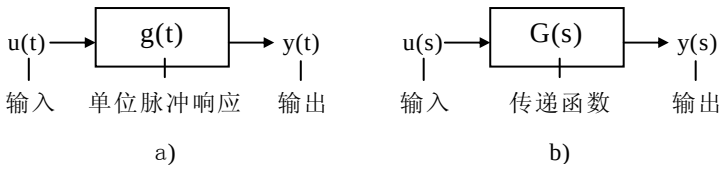
[7]王家骐等,《详查相机像移速度矢计算数学模型、参数误差分配和估值误差分析》,长春光学精密机械研究所内部报告,1996年。

[8]王家骐、张广谋,《0九-2,JL-1瞄准系统海上精度试验中光测数据的计算和误差分析》,长春光学精密机械研究所内部报告,1980年月日2月。

§3 传递函数

3.1 用传递函数表示的线性系统随机信号的输入响应

在时域中，线性系统随机信号的输入和输出关系可以用图 3.1 a)表示。



a) b)

图 3.1 线性系统随机信号输入、输出框图

系统的输出为输入与系统的单位脉冲响应的卷积，如(3.1)式。

$$y(t)=\int_0^{\infty} g(t)u(t-\tau)d\tau \tag{3.1}$$

在频域中，线性系统随机信号的输入和输出关系可以用图 3.1 b)表示。

系统的输出为输入与系统的传递函数的乘积，如(3.2)式。

$$y(s)=G(s)u(s) \tag{3.2}$$

当 t＜0，u(t)=0；y(t)=0；g(t)=0。S 平面的右平面中没有极点。

输出的自相关函数为：

$$\begin{aligned}
&\Phi_y(\tau)=E[y(\tau)y(t+\tau)]\\
&=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}y(t)y(t+\tau)dt\\
&=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\int_0^{\infty}g(\tau_1)u(t-\tau)d\tau_1\cdot\int_0^{\infty}g(\tau_2)u(t+\tau-\tau_2)d\tau_2\right\}\mathrm{dt}\\
&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}g(\tau_1)g(\tau_2)[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}u(t-\tau_1)u(t+\tau-\tau_2)dt]d\tau_1d\tau_2\\
&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}g(\tau_1)g(\tau_2)\Phi_u(\tau+\tau_1-\tau_2)d\tau_1d\tau_2
\end{aligned}\tag{3.3}$$

输出的自相关函数的另一种算法为：

$$\Phi_y(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\int_0^\infty g(\tau_1)u(t-\tau_1)d\tau_1\cdot y(t+\tau)]dt$$

$$=\int_0^\infty g(\tau_1)[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}u(t-\tau_1)y(t+\tau)d\tau]d\tau_1$$

$$=\int_0^\infty g(\tau_1)\Phi_{uy}(\tau+\tau_1)d\tau_1 \qquad (3.4)$$

输入、输出的互相关函数为：

$$\Phi_{uy}(t)=E[u(\tau)y(t+\tau)]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}y(t+\tau)u(t)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[u(t)\int_0^\infty g(\tau_1)u(t+\tau-\tau_1)d\tau_1]dt$$

$$=\int_0^\infty g(\tau_1)[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}u(t)u(t+\tau-\tau_1)dt]d\tau_1$$

$$=\int_0^\infty g(\tau_1)\Phi_u(\tau-\tau_1)d\tau_1 \qquad (3.5)$$

其中：$\phi_u(\tau)$—输入的自相关函数。

对(3.3)进行富氏变换可得输入、输出的频谱函数：

$$\Phi_y(\omega)=F^{-1}[\Phi_y(\tau)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_0^\infty\int_0^\infty g(\tau_1)g(\tau_2)\Phi_u(\tau+\tau_1-\tau_2)dt_1d\tau_2]\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty g(\tau_1)g(\tau_2)e^{j\omega\tau_1}e^{-j\omega\tau_2}\cdot[\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_u(\tau+\tau_1-\tau_2)e^{-j\omega(\tau+\tau_1-\tau_2)}d\tau]d\tau_1d\tau_2$$

$$=\int_0^\infty g(\tau_1)e^{j\omega\tau_1}d\tau_1\cdot\int_0^\infty g(\tau_2)e^{-j\omega\tau_2}d\tau_2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_u(\tau+\tau_1-\tau_2)e^{-j\omega(\tau+\tau_1-\tau_2)}d\tau$$

$$=G(-j\omega)G(j\omega)\Phi_u(\omega)$$

$$=|G(j\omega)|^2\Phi_u(\omega) \qquad (3.6)$$

对(3.4)和(3.5)分别进行富氏变换得：

$$\Phi_y(\omega)=G(-j\omega)\Phi_{xy}(\omega) \qquad (3.7)$$

$$\Phi_{uy}(\omega)=G(j\omega)\Phi_u(\omega) \qquad (3.8)$$

以传递函数为G(s)所描述的线性系统中，当随机信号u(t)输入时，输出为g(t)。输入、输出关系式由(3.6)式确定，即把输入、输出$[G(j\omega)]^2$用传递函数形式表示为输入输出的频

谱密度函数。(3.8)式是系统识别时常用的重要关系式。当输入u(t)是白噪声时，$\Phi_u(\omega)=1$，则：

$$\Phi_{uy}(\omega)=G(j\omega) \tag{3.9}$$

表示了输入、输出的相互频谱密度(即输入、输出的相关函数的富氏变换)是系统的传递函数。

3.2 控制系统的主要环节的传递函数

1)比例放大环节

传递函数: $G(s)=K$

频率特性: $G(j\omega)=K$

对数幅频特性: $20\log|G(j\omega)|=20\log K$ db

相频特性: $\Phi(\omega)=0°$ (3.10)

2)积分环节

传递函数: $G(s)=\frac{1}{TS}$

频率特性: $G(j\omega)=j\omega T$

对数幅频特性: $20\log|G(j\omega)|=20\log\omega T$ db

相频特性: $\Phi(\omega)=90°$ (3.11)

3)微分环节

传递函数: $G(s)=TS$

频率特性: $G(j\omega)=j\omega T$

对数幅频特性: $20\log|G(j\omega)|=20\log\omega T$ db

相频特性: $\Phi(\omega)=90°$ (3.12)

4)惯性环节

传递函数: $G(s)=\frac{1}{1+TS}$

频率特性: $G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}$

对数幅频特性: $20\log|G(j\omega)|=-20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}$

相频特性：　　$\Phi(\omega) = -arctg\omega T$　　（3.13）

5)一阶导数环节

传递函数：　　G(s)=1+TS

频率特性：　　G(jω)=1+jωT

对数幅频特性：　$20\log|G(j\omega)| = -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}$

相频特性：　　$\Phi(\omega) = -arctg\omega T$　　（3.14）

6)振荡环节

传递函数：　　$G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2}$

ξ-阻尼系统，ωn-谐振频率

频率特性：　　$G(j\omega) = \dfrac{1}{1+2\xi(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2}$

对数幅频特性：

$$20\log|G(j\omega)| = -20\log\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

相频特性：　　$\Phi(\omega) = -arctg\dfrac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$　　（3.15）

7)纯滞后环节

传递函数：　　G(s)=$e^{-\tau s}$，　τ-延迟时间

频率特性：　　G(jω)=$e^{-j\omega\tau}$

对数幅频特性：　20log|G(jω)|=0

相频特性：　　Φ(ω)=-ωτ　　（3.16）

8)组合环节

串联系统：　　$G(s)=\prod_{i=1}^{n} G_i(s)$

并联系统：　　$G(s)=\sum_{i=1}^{n} G_i(s)$

反馈闭环系统：　$G(s)=\dfrac{G_1(s)}{1\pm G_1(s)\cdot H(s)}$　　（3.17）

3.3　一个自由度机械系统的传递函数

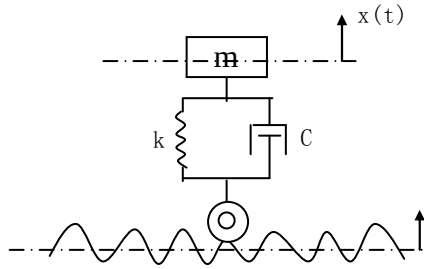


图 3.2 一个自由度机械系统示意图

其中：X₀(t)— 输入(随机信号)；
X(t)— 输出；
m — 质量；
k — 刚度系数；
C — 阴尼系数。

系统的运动方程式为：

$$m\ddot{x}+c(\dot{x}-\dot{x}_0)+k(x-x_0)=0 \qquad (3.18)$$

设 k/m= ω_0^2，$C/\sqrt{mk}=2\xi$，$u(t)=x_0(t)+2\dot{x}_0(t)\xi/\omega_0$，则上式为：

$$\ddot{x}+2\xi\omega_0\dot{x}+\omega_0^2x=\omega_0^2u(t) \qquad (3.19)$$

系统的传递函数为：

$$G(s)=x(s)/u(s)$$

$$G(s)=\frac{\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2} \qquad (3.20)$$

分析中，设 u(t)为白噪声，ξ＜1。

脉冲响应为：

$$g(t)=\frac{\omega_0^2}{\omega_1}e^{-\xi\omega_0 t}\sin\omega_1 t \qquad (3.21)$$

其中：$\omega_1=\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0$

其功率频谱密度函数为：

$\phi_x(\omega)=G(j\omega)\cdot G(-j\omega)\phi_u(\omega)$

由于$u(t)$是白噪声，因此$\phi_u(\omega)=1$，则：

$$\Phi_x(\omega)=\frac{\omega_0^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(2\xi\omega_0\omega)^2}$$

$$=\frac{\omega_0^4}{[\omega^2-\omega_0^2(1-2\xi^2)]^2\cdot 4\xi^2(1-\xi^2)\omega_0} \qquad (3.22)$$

可知当$\omega^2=\omega_0^2(1-2\xi^2)$时，有尖峰的共振现象。因此当白噪声$u(t)$输入时，车体强烈吸收其自身固有频率相对应的能量而引起共振。

3.4 光学系统传递函数

光学系统(或其它成像环节)对不同空间频率物体的衰减情况，称为系统或环节的频率响应、传递特性或光学传递函数(OTF)。

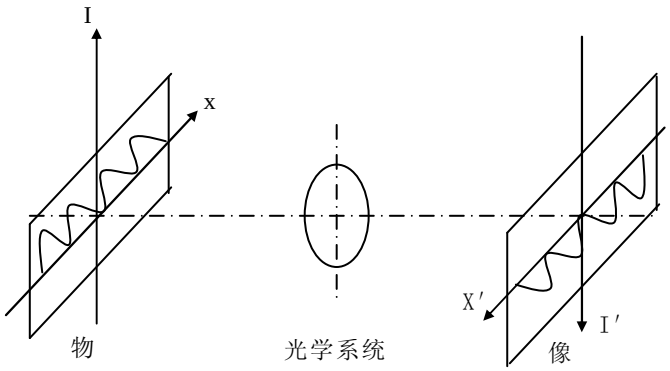


图 3.3 光学成像系统的物像关系图

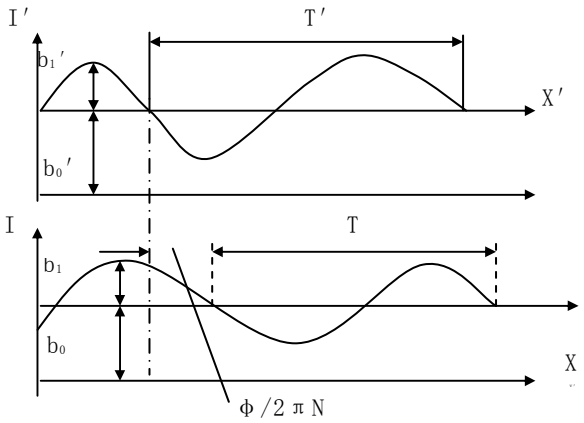


图 3.4 物像一维正弦亮度分布图

如图 3.3、3.4 所示，设物面上原物体的亮度分布为：

$$I(x) = b_0 + b_1 \cos 2\pi \mathrm{N}x \qquad (3.23)$$

其中：b_1—亮度起伏；

b_0—平均亮度；

T—周期(mm)；

N—l/T 空间频率(lp/mm)。

由于光学系统有衍射、像差和破坏像质的其它因素影响，像的亮度分布为：

$$I(x') = b_0' + b_1' \cos(2\pi \mathrm{N}'x - \Phi) \qquad (3.24)$$

为讨论方便，假定光学系统放大倍率等于 1，即 X=X′；透过率等于 1，即 $b_0'=b_0$，可以看到，成像后，像与物有两点相同，两点不同。

相同：a)像的亮度分布仍然是正弦分布；

b)像与物的亮度分布周期相等，T=T′(放大率等于 1^{X})。

像的亮度分布可以写成：

$$I'(x) = b_0 + b_1' \cos(2\pi \mathrm{N}x - \phi) \qquad (3.25)$$

两点差别：

a)$b_1' < b_1$；

b)像的位置错动了一个 Φ 角，即相位变了。

3.4.1 从物理概念上进行讨论

1)调制度变小了，即对比变小了，亮度起伏小了。

定义调制度：

$$M = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \qquad (3.26)$$

物的调制度为：

$$M_0 = b_1 / b_0 \qquad (3.27)$$

像的调制度为：

$$M_0' = b_1' / b_0', = b_1' / b_0 \qquad (3.28)$$

由于：$b_1' < b_1$，$\therefore M_0' < M_0$。

正弦亮度分度的物通过光学系统，使调制度下降，可以表示为：

$$MTF = \frac{M_0'}{M_0} = \frac{b_1'}{b_1} \leq 1 \qquad (3.29)$$

物、像调制度之比，称为光学系统调制传递函数，用MTF表示。

经过归化：MTF≤1。

其内涵为通过光学系统，调制度只会降低，不会提高；从信息传递观点来说，通过光学系统，总的信息量只能减小，不会增加。

2)位相错动了了Φ角，这是由于不对称像差(如慧差)引起的。定义：

$$PTF = \tan\phi \quad \text{，称相位传递函数} \qquad (3.31)$$

3)调制度下降和位相错动都是随频率而变化，物正弦亮度分布的频率不一样，下降和错动的大小也不一样。频率指空间频率，即每毫米的周波数[lp/mm]，定义归化频率：

$$S = \frac{\lambda}{2n'\sin u'} N_s \qquad (3.32)$$

其中：λ—波长；

n′ sinu′ --像方数值孔径;

N_s—实际的空间频率。

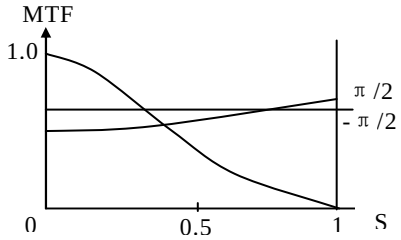


图 3.5 MTF 和 PTF 随归化频率的变化图

3.4.2 MTF 曲线的两个重要性质

1)MTF 曲线有一个截止频率，当 S=1 时：

$$N_{s_0}=\frac{2n'\sin u'}{\lambda}=\frac{2NA}{\lambda}(=\frac{2D/f}{\lambda})$$

就是各类光学系统的理论分辨极限或称极限分辨力、截止频率。

表 3.1 瑞利极限和理论分辨极限的比较

	瑞利极限分辨力	S=1 时的理论分辨力
显微镜	$\delta=0.6\lambda/n\sin u$ $N=1.67n\sin u/\lambda$	$\delta=0.5\lambda/n\sin u$ $N=2n\sin u/\lambda$
望远镜 λ=0.555μm 时	$\theta=(140/D)''$	$\theta=(112/D)''$
照像物镜	N=1470/F 数 lp/mm	N=1800/F 数 lp/mm

由表 3.1 可知,用 MTF 曲线可以更精确描述光学系统分辨极限，它是比瑞利极限更高的一个数。

2)光学系统 MTF 曲线有负值,这是 MTF 曲线的另一个重要特点。

$$MTF=-b_1'/b_1$$

b_1'取负值，表示像的亮度起伏与原物体相反，发生对比反转，也就是相位错动了半个周期，黑的变白，白的变黑，如图 3.6 所示。

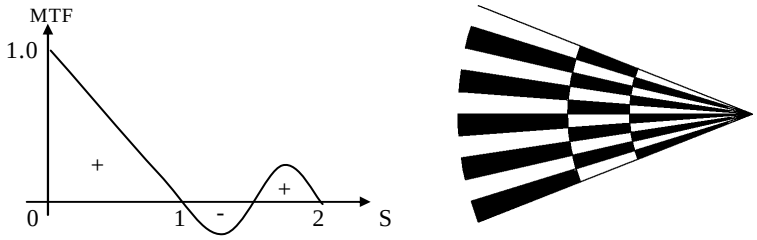


图 3.6 对比反转

上图有三个 MTF=0 的点，即伪分辨情况(在用辐条状目标成像后，出现黑白条纹位置颠倒的现象，只不过辐条状物体是对方波反应，而 MTF 是对正弦波反应)。

总之，光学系统或器件，对正弦波的反应，可以用 MTF 和 PTF 来表示，合起来总称为 OTF，即光学传递函数。

3.5 光学传递函数的进一步认识

3.5.1 一维成像

令光学系统在指定的视场、孔径、焦面、波长的线扩散函数为 A(δ)。

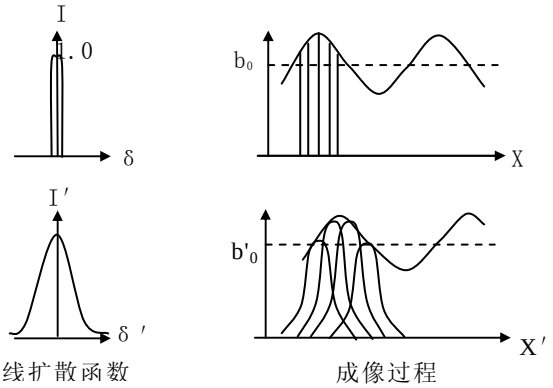


图 3.7 光学系统一维成像示意图

正弦物的能量分布为：

$$I(x) = b_0 + b_1 \cos 2\pi Nx$$

物像关系为：

$$I'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\delta) I(x-\delta) ds \qquad (3.33)$$

$$I'(N) = A(N) \cdot I(N) \qquad (3.34)$$

$$A(N) = I'(N) / I(N) \qquad (3.35)$$

$$OTF(N) = A(N) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\delta) e^{-i2\pi N\delta} d\delta \qquad (3.36)$$

其中：A(N)— A(δ)的付氏变换；

I(N) — 物能量分布的付氏变换；

I′ (N)— 像能量分布的付氏变换。

令：A_C(N)为付氏余弦变换；

A_S(N)为付氏正弦变换。

有：

$$A_c(N) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\delta) \cos 2\pi N\delta d\delta \qquad (3.37)$$

$$A_s(N) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\delta) \sin 2\pi N\delta d\delta \qquad (3.38)$$

则：　　$MTF(N)=\sqrt{A_c^2(N)+A_s^2(N)}$　　(3.39)

$$PTF(N)=\arctan A_s(N)/A_c(N)\qquad(3.40)$$

$$OTF=MTF(N)\cdot e^{-i\cdot PTF(N)}\qquad(3.41)$$

即光学系统的传递函数就是线扩散函数 A(δ)的付氏变换。

3.5.2　二维成像

假定光学系统光瞳坐标为 x、y，像面坐标为 u、y，并用归化频率，则二维成像时光学系统的传递函数为：

$$OTF(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int A(u,v)e^{-2\pi i(us+vt)}dudv\qquad(3.42)$$

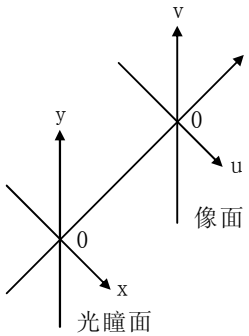


图 3.8 光学系统二维成像示意图

A(u,v)是两维的点扩散函数，根据衍射理论，它等于点物成像时，像面上振幅分布函数|F(u,v)|的平方：

$$A(u,v)=\left|F(u,v)\right|^2\qquad(3.43)$$

点像的振幅分布由经典电磁波理论推出为：

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int f(x,y)e^{i2\pi(ux+vy)}dxdy\qquad(3.44)$$

其中：f(x,y)为光学系统的光瞳函数，定义为：

$$f(x,y)=\begin{cases}T(x,y)e^{-ik\omega(u,v)} & \text{在光瞳内}\\ 0 & \text{在光瞳外}\end{cases}\qquad(3.45)$$

式中：T(x,y)为光瞳透过率函数，W(x,y)为波象差函数，K=2π/λ。

由此，光学系统传递函数可写成：

$$OTF(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A(u,v)e^{-2\pi i(us+vt)}dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(u,v)\right|e^{-2\pi i(us+vt)}dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)\cdot F^{*}(u,v)e^{-2\pi i(us+vt)}dudv \qquad (3.46)$$

这是一个共轭函数的付氏变换，根据自相关函数的付氏变换性质，它应等于 F(x,y)函数的逆付氏变换函数 f(x,y)的自相关积分，即：

$$OTF(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\cdot f^{*}(x-s,y-t)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+s/2,y+t/2)\,f^{*}(x-s/2,y-t/2)\,dxdy \quad (3.47)$$

表明光学系统的 OTF 是光瞳函数的自相关积分。而光瞳函数是与波像差有关，波像差是由系统结构参数决定。因此，用此式可以由结构参数→求波像差→求光瞳函数→求 OTF，这是基本公式。

3.5.3 计算光学系统传递函数的三种方法

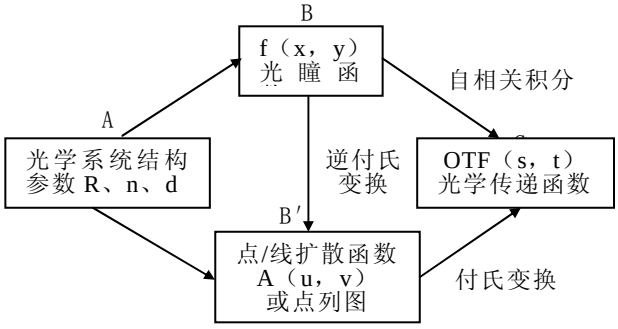


图 3.9 计算光学系统传递函数的三种方法图解

1)自相关积分法： A→B→C;

2)快速付氏变换法：A→B→B′ →C，经两次付氏变换，具有快速性，数据全等优点(但要用大容量计算机);

3)点列图方法：A→B′ →C，是一种几何光学近似计算方法，在低频时常用，速度快，有一定的精度。

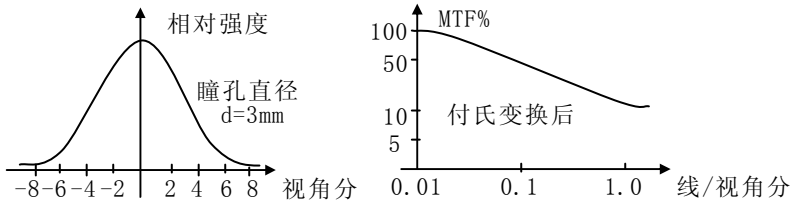
光学传递函数除了光学系统的结构因数外，还要考虑：光波的波长、照明(相干照明、非相干照明)、光线的离轴的情况、对称性(弧矢、子午面)等。

3.6 各种光学环节的传递函数

3.6.1 人眼的传递函数

人眼的性能是光学系统总体设计中必须考虑的重要一环。目视系统以人眼作光学接收器，就是由摄影、电视等系统得到的图像，最后还是用人眼来判读、观察。

人眼作为一个光学系统有像差、有衍射作用，视网膜又是一个颗粒状的接收器。物体通过眼球成像到视网膜上，要形成一个扩散函数。人眼形成的像的能量分布可表示为指数函数形式，如图 3.10 a)，进行付氏变换后得到的 MTF 如图 3.10 b)。也可直接测量得到人眼的 MTF，如图 3.11。



a)点扩散函数　　b)付氏变换后 MTF

图 3.10

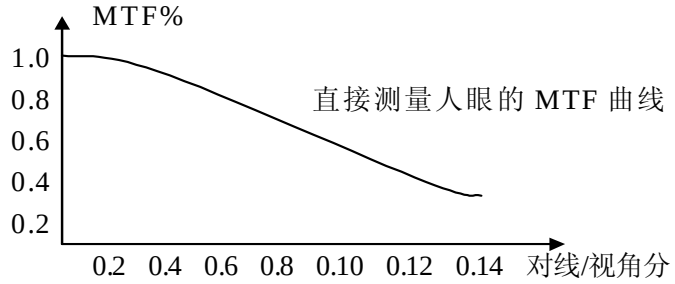


图 3.11 直接测得的人眼 MTF

考虑到人的视觉的生理特点，又有人测出视觉系统的 MTF

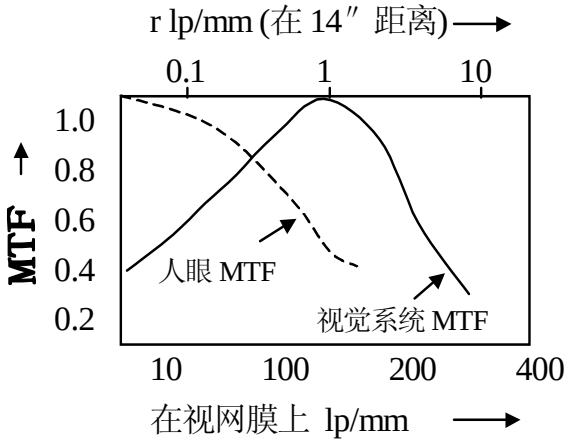


图 3.12 考虑人的视觉生理特点
测出的视觉系统的 MTF 曲线

在 16 lp/mm(视网膜上)有极大值,截止频率，在 50～200 lp/mm，与实际测试结果比较吻合。

当物体对眼的张角大于 3′ 时，人眼所能发现的极限对比，也称为人眼极限灵敏度阈，这是一个经常要用到的量,经测定，其值为：

$$c_{人眼}=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\min}}=\frac{0.05}{0.95}\approx 0.05$$

其中：$I_{max}=1$，$I_{min}=0.95$，其物理意义如图 3.13 所示,对应的极限限调制度为:

$$M_{人眼}=\frac{1-0.95}{1+0.95}=0.026\text{。}$$

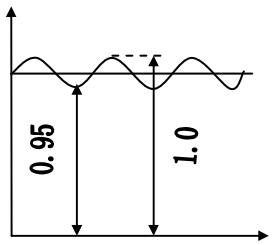


图 3.13 人眼极限灵敏阈物理意义图示

3.6.2 底片的传递函数

底片的 MTF 由乳剂层、片基的反射、乳剂感光银颗粒性等造成(是各向同性)，还与显影、定影有关。

底片的 MTF 主要靠实验测定,表 3.2 列出与实验测定结果符合精度较高的四种近似表示。

表 3.2 底片 MTF 实验测定结果表

	MTF	线扩散函数A（x）	点扩散函数 P（r）	精度
1	$\exp(-\frac{2\pi N}{a})$	$\frac{a}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(ax)^2}$	$\frac{a^2}{\pi}\cdot\frac{1}{[1+(ar)^2]^{3/2}}$	0.96
2	$\frac{1}{1+(2\pi N/a)^2}$	$\frac{a}{2}\cdot\exp[-a(x)]$	$\frac{a^2}{2\pi}\cdot k_0(ar)$	0.99
3	$\frac{1}{[1+(2\pi N/a)^2]^{3/2}}$	$\frac{a^2(x)}{\pi}k_1[a(x)]$	$\frac{a^2}{2\pi}e^{-ar}$	0.98
4	$\exp[-(\frac{2\pi N}{a})^2]$	$\frac{a}{2\sqrt{\pi}}\exp[-(\frac{ax}{2})^2]$	$\frac{a^2}{4\pi}\exp[-\frac{ar}{2}]^2$	0.94

表中：N—频率(lp/mm)；

a—与底片性能有关的系数(感光银粒颗粒愈细,a 值愈大)；

精度—指与实验测定的 MTF 值平均符合精度。

由上表可知，各种底片的 MTF 近似表示法，基本上都是高斯函数或指数函数。

Agfa-IF 底片，对应表 3.2 用四种近似方法表示，系数 a 的选取，以最小平方差为标准：

① $e^{-2\pi N/a}$ a=510mm^{-1}；

② $\frac{1}{1+(2\pi N/a)^2}$ a=330mm^{-1}；

③ $\frac{1}{[1+(2\pi N/a)^2]^{3/2}}$ a=440mm^{-1}；

④ $e^{-(2\pi N/a)^2}$ a=430mm^{-1}。

底片的调制度与底片的特性曲线有关，如图 3.14 所示。

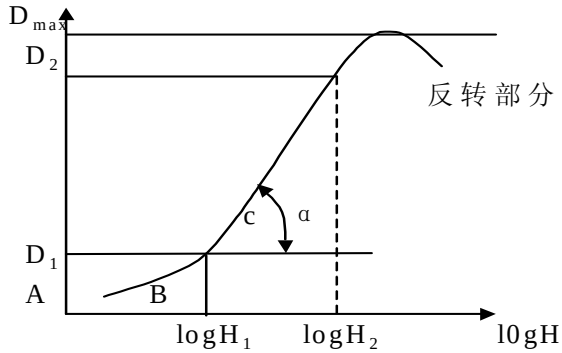


图 3.14 底片的特性曲线

在特性曲线的线性部分有:

$$D_2 - D_1 = \gamma(\log H_2 - \log H_1) = \gamma \log(H_2 / H_1) \quad (3.48)$$

式中： γ —底片伽玛值， $\gamma = \tan\alpha$；

D—黑度值，D_{max}≈3～4；

H—曝光量，H=E×t=照度 X 曝光时间。

底片如用人眼判读，其极限调制度是与人眼灵敏阈有关，也与 γ 值有关。用人眼判读，要求底片：D2-D1=0.05，即：$\log(H_2/H_1)=0.05/\gamma$ 。

当 γ =1 时， c= $H_2/H_1 \geqslant 1.12$, $M_{底片} \geqslant \dfrac{1.12-1}{1.12+1} = 0.057$；

γ =2 时， c= $H_2/H_1 \geqslant 1.06$, $M_{底片} \geqslant \dfrac{1.06-1}{1.06+1} = 0.029$。

这就是底片的极限调制度，比 $M_{底片}$更小，人眼就判读不了。

3.6.3 大气调制传递函数的计算

1)大气透过率

对一些目视光学仪器(例如夜视仪)来讲，一般可以用图 3.15 来表示其成像过程。

图像从目标到人眼接收的传递过程中,要经过几百米甚至

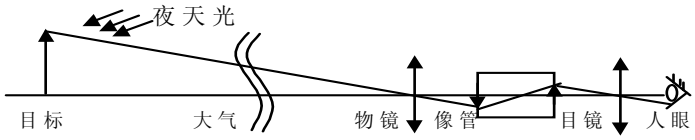


图 3.15 通过大气的图像传递

几千米、几十公里的大气，其对成像的影响是决不能忽略的。我们知道，在图像传递过程中主要发生了三种传递作用：一是视角的传递，二是亮度的传递，三是对比的传递。大气对后两个传递直接发生影响，特别是在电视和红外跟踪测量、望远摄影、航空和航天摄影中，大气造成的影响必须加以考虑。下面讨论关于大气透过率的问题。

当光通过大气时，由于悬浮微粒(即大气中的微粒)散射或吸收而产生衰减。作为微粒的有云、雨、雾、霾中水滴、烟雾中液滴、烟、尘埃等。即使是在非混浊的晴空中也会被空气分子所散射。

图 3.16 表示了一束强度为 I 的平行通过大气时产生衰减的情况。

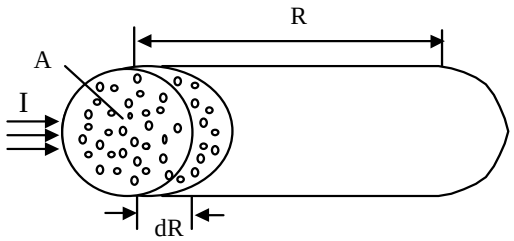


图 3.16 光通过大气的透过率计算

设强度为 I 的平行光束，通过厚度为 dR 的大气层时产生的衰减为：

$$dI = -I \cdot n \cdot A \cdot dR \tag{3.49}$$

式中：负号表示衰减量，n 为单位体积内的微粒数，A 为单个微粒的平均截面积。

设：

$$\sigma = nA \tag{3.50}$$

为大气的衰减系数(消光系数)，则(3.49)式可写成：

$$dI = -I \cdot \sigma \cdot dR \tag{3.51}$$

将⑶式整理并两边进行积分：

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = \int_0^R -\sigma dR$$

$$\ln I \Big|_{I_0}^{I} = -\sigma R$$

$$\ln(\frac{I}{I_0}) = -\sigma R$$

$$\therefore \quad T_a = \frac{I}{I_0} = \exp(-\sigma R) \tag{3.52}$$

我们把(3.52)式的$T_a = \exp(-\sigma R)$定义为光通过路程 R 的大气透过率，衰减系数σ是由散射系数σ_b和吸收系数σ_k组成的，即：

$$\sigma = \sigma_b + \sigma_k$$

在实际的大气中，对可见光而言，吸收系数很小，光几乎是被散射衰减的，另外，(3.52)式对单色光和由均匀大气组成的水平路程才严格有效。

人们已经知道，下列大气透过率的实验公式与在波长λ=0.35～1.54μm之间测定的数值极为一致：

$$T_a(R) = \exp\left\{-3.912 R R_v^{-1} \left(0.55/\lambda\right)^{0.585 R_v^{1/3}}\right\} \tag{3.53}$$

式中：Rv 为能见距离，R 是被观察距离，二者单位都是km。此外，λ为波长，单位是μm。

由于大气透过率的存在，光(或辐射)通过大气时就会引起衰减。例如：某辐射源发射强度为 I 的光，经过大气衰减，在距离 R 处的辐照度为：

$$E = \frac{T_a \cdot I}{R^2}$$

在大气透过率T_a存在的情况下，若图 3.16 中的目标照度

为 E_s，物镜的光圈数为 F，目标的反射率为 ρ，物镜的透过率为 T_l，那么物镜焦平面上的照度将为：

$$E = \frac{T_a \cdot T_l P}{4F^2} \cdot E_s \tag{3.54}$$

2)大气的能见度

在大气中，由于大气微粒的存在，使得从目标表面发出而在观察方向上前进的光，一方面被大气的微粒散射所衰减，另一方面在光路中被途中微粒散射的空间光(见图 3.17 所示)所叠加。

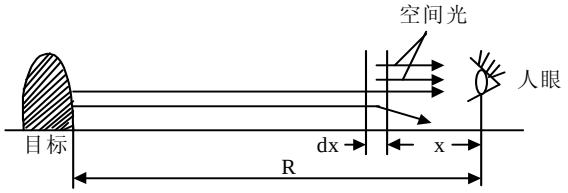


图 3.17 野外物体表观亮度随距离变化的说明

由此可见，观察一个目标时，在光路中会看到二种光：一种是来自目标的被大气衰减的光(L_1)，另一种是由大气散射产生的空间光(L_2)。

设目标在距离很近处的亮度为 L_0，那么由于大气衰减在距离 R 处的亮度 L_1 为：

$$L_1 = L_0 e^{-\sigma R} \tag{3.55}$$

式中：σ 为大气平均衰减系数，R 为被观察距离。

离观察者距离为 x，厚度为 dx 的空气层发出的散射在光路中的空间光强度与 dx 以及衰减系数 σ 成正比。设空气层的亮度为 Lσdx，空间光到达观察者时也受到衰减，变成：

$L\sigma e^{-\sigma x}dx$。

这样，在观察者和目标之间的空间光产生的亮度 L_2 为：

$$L_2 = \int_0^R L\sigma e^{-\sigma x} dx = L(1 - e^{\sigma R}) \tag{3.56}$$

若目标在无穷远，那么 $L(1-e^{-\sigma R})$就变为 L，这个 L 值就是在该方向上的天空亮度 L_H，也就是：

$L = L_H$。

因此，在距离 R 上观察到的目标表观亮度 L_0' 为：

$$L_0' = L_1 + L_2 = L_0 e^{-\sigma R} + L_H(1 - e^{-\sigma R}) \tag{3.57}$$

把(3.52)式代入(3.57)式，目标的表观亮度变为：

$$L_0' = L_0 T_a + L_H(1 - T_a) \tag{3.58}$$

同理，对背景的表观亮度 L_b' 有：

$$\begin{aligned} L_b' &= L_b e^{-\sigma R} + L_H(1 - e^{-\sigma R}) \\ &= L_b T_a + L_H(1 - T_a) \end{aligned} \tag{3.59}$$

在实际的观察中我们体会到：当目标逐渐变远时，目标与周围背景之间的亮度对比会逐渐变小，直到目标看不清。当目标亮度 L_0，背景亮度 L_b 已知时，则对比 C 为：

$$C = \left| \frac{L_0 - L_b}{L_b} \right| \tag{3.60}$$

如果以观察方向的天空为背景，从很近距离上观察到的目标与背景的对比为 C_0，那么从距离 R 上观察到的对比 C_R 为：

$$\begin{aligned} C_R &= \left| \frac{L_R - L_H}{L_H} \right| \\ &= \left| \frac{L_0 e^{-\sigma R} + L_H(1 - e^{-\varsigma R}) - L_H}{L_H} \right| \\ &= \left| \frac{L_0 - L_H}{L_H} \right| e^{-\sigma R} \end{aligned},$$

即：

$$C_R = C_0 \cdot e^{-\sigma R} \tag{3.61}$$

由此可见，以天空为背景的物体对比的衰减与平行光束的亮度衰减相同。

若目标为黑色物体，则 $L_0=0$，$C_0=1$，这时根据(3.61)式有：

$$C_R = e^{-\sigma R} \tag{3.62}$$

如果对比的识别阈值为 2%，即 C_R=0.02，那么有:

$$e^{-\sigma R} = 0.02 ,$$

$$-\sigma R = \ln 0.02 = -3.912 ,$$

$$\therefore \qquad R_v = \frac{3.912}{\sigma_v} \qquad (3.63)$$

识别以天空为背景的黑色物体时，常把识别对比阈值为 0.02 时得到的最大距离叫作能见距离(能见度)R_v(这个 R_v,在日本和西德叫视程,在美国叫气象距离)，σ_v 叫大气平均衰减系数。

图 3.18 表示了当识别对比阈值为 0.02 时的能见距离 R_v 和大气平均衰减系数 σ_v 之间的关系。

3)大气扰动造成的 MTF

上面我们讨论了大气透过率和大气能见度的有关计算，并初步了解到大气对成像性能有影响，为了进一步说明大气对成像性能的影响，必须采用传递函数方法加以处理。

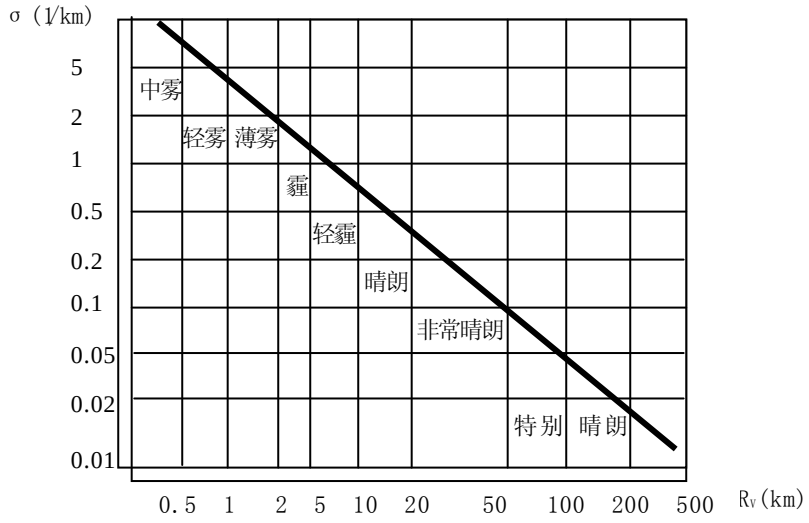


图 3.18 白昼能见距离 R_V 和大气衰减系数 σ 的关系

大气调制传递函数主要是由两部分组成：一部分是大气扰动造成的，记为 $MTF_{扰动}$；另一部分是由大气微粒散射引起的，记为 $MTF_{散射}$。总的大气调制传递函数记为 $MTF_{大气}$可以写成：

$$MTF_{大气} = MTF_{扰动} \cdot MTF_{散射}$$

这里，首先来讨论由大气扰动引起的 $MTF_{扰动}$。由于大气折射率和大气密度是随着气压和气温变化而变化的，所以当大气密度和折射率不均匀时，来自一个物点并通过大气的波前就会产生变形。这种变化在自然界中总是存在的，并且是随机的，故叫做扰动(或湍流)。

关于大气扰动引起的调制传递函数可以表达为：

$$MTF_{扰动} = \exp(-3.44 v_0^{5/3}) \tag{3.64}$$

其中 v_0 是被 d_0 规化的空间频率，它可写成：

$$v_0 = v \cdot \lambda \cdot f / d_0 \tag{3.65}$$

式中：v 是物镜焦平面上空间频率(lp/mm)；λ 是波长；f 是物镜焦距(mm)；d_0 是相干距离，其可表示为：

$$d_0 = 3.18 / A_1^{3/5} \tag{3.66}$$

式中：A_1 是大气结构函数。对于接近地面的水平距离来说有：

$$A_1 = 2.91 K^2 \cdot R \cdot C_n^2 \tag{3.67}$$

式中：k=2π／λ，是传播常数；R 是观察距离(m)；C_n 是大气折射率结构常数($m^{-1/3}$)。

把（3.66）式代入(3.65)式得：

$$v_0 = v \cdot \lambda \cdot f \cdot \frac{A_1^{3/5}}{3.18}$$

因此得：

$$v_0^{5/3} = [v \cdot \lambda \cdot f(0.3144) \cdot A_1^{3/5}]^{5/3}$$

$$= v^{5/3} \cdot f^{5/3} \cdot \lambda^{5/3} \cdot (0.3144)^{5/3} \cdot A_1 \tag{3.68}$$

将(3.67)式代入(3.68)式得：

$$v_0^{5/3} = v^{5/3} \cdot f^{5/3} \cdot \lambda^{5/3} \cdot (0.1448)(2.91) \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot R \cdot C_n^2$$

$$= 1.69 v^{5/3} \cdot f^{5/3} \cdot \lambda^{-1/3} \cdot R \cdot C_n^2 \cdot \pi^2 \tag{3.69}$$

将(3.69)式代入(3.64)式得到：

$$MTF_{扰动}=\exp[-5.8\pi^2 v^{5/3}\cdot f^{5/3}\cdot \lambda^{-1/3}\cdot R\cdot C_n^2] \qquad (3.70)$$

公式(3.70)表达了由大气扰动引起的调制传递函数，它与物镜焦平面上的空间频率 v、物镜焦距 f、波长 λ、被观察距离 R 和大气折射率结构常数 C_n 有关。在这些参数中主要取决于 C_n 的大小。在强扰动(即 C_n 很大)下，计算得到的 MTF $_{扰动}$ 较低，也就是对成像对比度影响较大；在弱扰动(即 C_n 很小)下，计算得到的扰动 MTF $_{扰动}$ 较高，也就是对成像对比度影响较小，这时往往可以把它略去不计。此外，一般而言，大气扰动白天比夜晚大，冬天比夏天大，靠近海洋比陆地大，远距离比近距离大，弱扰动时 $C_n=8\times10^{-9}$ 米$^{-1/3}$。

4)大气微粒散射引起的 MTF

正如前面讲过的那样，由于大气透过率和天空亮度的影响，不仅使通过大气观察的目标表观亮度与固有的亮度不同，而且目标的表观对比也发生了变化。这种对比的变化可以利用调制传递函数来描述。

利用(3.58)式和(3.59)式可以得到：

$$\frac{|L_0'-L_b'|}{L_b'}=\frac{|L_0-L_b|T_a}{L_bT_a+L_H(1-T_a)}=-\frac{|L_0-L_b|}{L_b[1+{}^{L_H}\!/_{L_b}({}^{1-T_a}\!/_{T_a})]} \qquad (3.71)$$

设 $C'=\dfrac{|L_0'-L_b'|}{L_b'}$ 为经大气后看到的目标表观对比；

$C_0=\dfrac{|L_0-L_b|}{L_b}$ 为未经大气看到的目标固有对比；

$K=\frac{L_H}{L_b}$为天空背景亮度比。

那么根据(3.71)式就可得到：

$$MTF_{散射}=\frac{C'}{C_0}=[1+K(\frac{1}{T_a}-1)]^{-1} \tag{3.72}$$

根据(3.52)式可将(3.72)式改写成：

$$MTF_{散射}=[1+K(e^{\sigma R}-1)]^{-1} \tag{3.73}$$

这就是由微粒散射引起的调制传递函数的表达式。由此可见，MTF $_{散射}$与天空背景亮度比 K、大气能见度和被观察距离 R 有关。此外，由于观察距离与空间频率有关，因此，MTF $_{散射}$也与空间频率有关。

关于天空背景亮度比见表 3.3。

表 3.3 天空背景亮度之比

天空	背景	亮度比（K）
阴天	雪	1
	沙漠	7
	山林	25
晴天	雪	1. 2
	沙漠	1. 4
	山林	5

3.6.4 振动与像移的传递函数

由于光学成像系统的载体(可以是人、车辆、舰船、航空、航天器等)的运动，特别是角运动或角振动，造成光学系统成像面(可以是底片、各种光电图像接收器上像)的振动和移动。当像面上设置了像移补偿措施后，这种运动为像移补偿后的残差。这种像相对记录介质或接收器之间的相对振动与像移会影响到成像系统的调制传递函数。以下举四种如图 3.19 表示的运动例子。

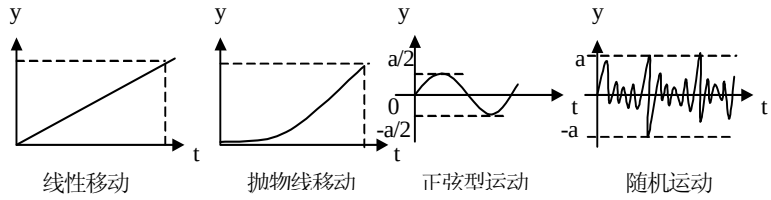


图 3.19 运动曲线图

对应图 3.19 四种运动的 MTF 分别为：

1)线性运动：

$$MTF(N)=\frac{\sin \pi aN}{\pi aN} \tag{3.74}$$

式中： a—像移移动量（$a=V_p\cdot\Delta t$，V_p 为像面像移速度；Δt 为曝光时间(或积分时间)；

N—频率空间。

2)抛物运动：

$$MTF(N)=\frac{1}{2\sqrt{aN}}\left\{\int_0^{2aN}[\cos\frac{\pi}{2}v^2+\sin\frac{\pi}{2}v^2]dv\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.75}$$

3)正弦形运动：

$$MTF(N)=J_0(\pi aN) \tag{3.76}$$

式中： a—像运动的峰-谷值大小；

J_0—零阶贝塞尔函数。

4)随机运动：

$$MTF(N)=e^{-2\pi^2a^2N^2} \tag{3.77}$$

式中： a—在像面上，像的运动平方平均值，如在大气扰动中，$\alpha=f\sigma$；

其中： f —成像光学系统焦距；

σ—大气波面变化强度因子。

3.7 CCD 星载相机综合传递函数分析

本实例中的 CCD 星载相机最终目的是能从计算机屏幕上分辨出地面像面元分辨力优于一米的地面目标的图像,能否实现和怎样实现这一目的应在相机设计开始时进行系统的分析和予估，以减少盲目性。近年来对和光学有关的系统进行分析论证都采用调制传递函数(MTF)分析的方法，在分析过程中要涉及到影响像质的各环节的误差以及对相机各部分公差的要求。因此这一分析对相机设计是有实际意义的，得出的结论是有实际价值的。

1)计算分析的依据

a)焦距: f′ =6m;

b)F/数: $F^{\#}$=10;

c)波长: 510nm～900nm;

d)采用 96 级 TDICCD，像元尺寸 d×d=10μm×10μm。

据此得出 Nyquist 频率为 $V_N = 50lp/mm$。相对光学系统的归化频率为： $V_C = V_N \cdot \lambda \cdot F^{\#} = 0.35$，焦距 6m，轨道高度 500km,，对应的地面像元分辨力为 0.83m，下面的分析计算都对这一分辨力而言。

2)光学串

地面目标最后成像在计算机屏幕上要经过许多环节,我们称这一系统为光学串。计算机屏幕上图像的清晰度决定于图像的对比，而图像的对比又和目标及背景的对比有关。对比用调制度表示为：

$$M = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

$I_{\max}$、$I_{\min}$ 为亮度最大值和最小值。光学串中每一环节对最后图像调制度的贡献用调制传递函数来描述。而最终图像的调制度可近似地描述为目标调制度和各环节调制传递函数

的乘积。由地面目标至计算机屏幕图像这一光学串可表示为图 3.20。

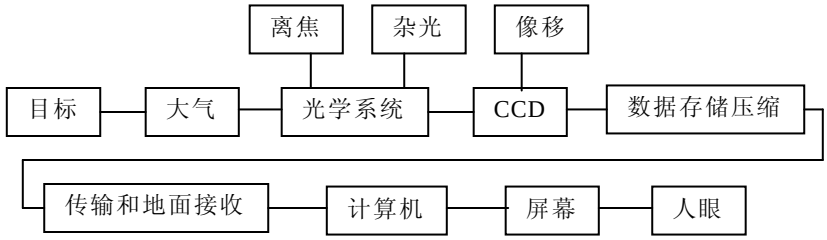


图 3.20 CCD 成像系统光学串

其中数据存储、压缩、传输和地面接收以及计算机这些环节，由于信噪比都很高，对图像对比的影响可忽略不计。我们只需要求出由 CCD 输出的视频信号的信噪比，就可估计出屏幕上图像的对比是否能被人眼分辨，因此可写成：

$$M_{信号}=M_{目标}\cdot M_{大气}\cdot M_{光学}\cdot M_{离焦}\cdot M_{像移}\cdot M_{杂光}\cdot M_{CCD} \quad (3.78)$$

各环节的 M 值可以有根据地求出来或估计出来。

3)目标对比

知道目标对比就可算出调制度。地面目标的对比都比较低。如美国 ITEK 公司生产的航空相机的分辨力都是指对比为 2:1 的分辨力卡而言。CCD 详查相机的指标要求中，分辨力指标没有提对比，不妨我们也取目标对比为 2:1。即：

$$C=\frac{I_{\max}}{I_{\min}}=2$$

于是：

$$M_{目标}=\frac{C-1}{C+1}=0.33 \quad (3.79)$$

对于其它目标对比的分析计算，可以求出对比为 2:1 的 $M_{信号}$ 后，很容易换算出来。

4)大气影响

大气对分辨力的影响主要有两种，一种由于温度，气压不均匀而造成大气折射率空间分布不均匀，且随时间而变化，

即大气抖动。对于卫星摄影，这一影响可忽略不计。另一影响是由于大气粒子散射作用而使目标的对比降低。这一影响可用反衬度来分析。对比为 2:1，反衬度为：

$$C_0 = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\min}} = C - 1 = 1$$

图 3.21 为三种不同大气条件下，波长和大气衰减系统的关系，取波长 λ=700nm，对于有轻微烟尘大气(能见距离 8 公里)，从图上查得 σ=0.4。又由于离地面高度大于 7.62 公里后，大气就不再使物的对比衰减，因此取 H=7.62 公里，于是经过大气后，目标反衬度为：

$$C_R = C_0 \cdot \exp[-0.2.\sigma.H] = 0.54$$

相应的对比为：

$$C = C_R + 1 = 1.54$$

因此得到经过大气后，对比为 2:1 的地面目标的调制度为：

$$M_{目标} \cdot M_{大气} = \frac{C-1}{C+1} = 0.21。 \qquad (3.80)$$

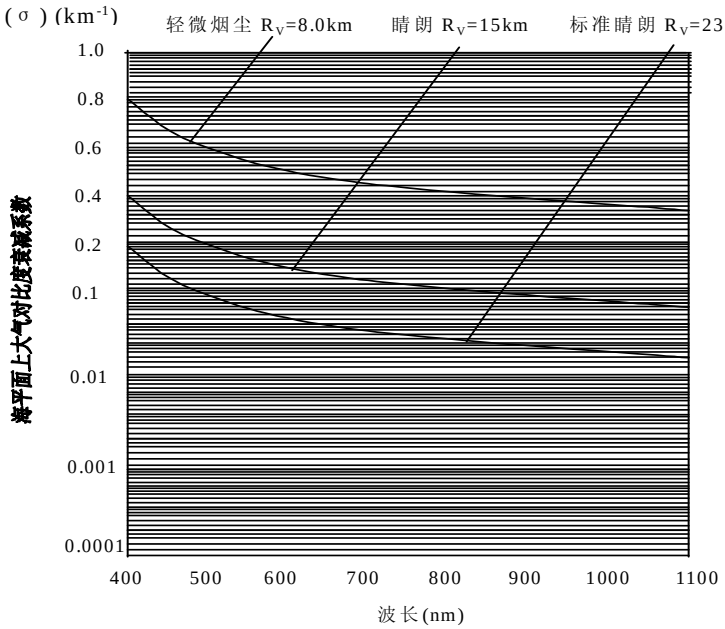


图 3.21 海平面上大气衰减系数与波长函数关系

5)光学系统影响

$M_{光学}$可表示为下面的乘积：

$$M_{光学}=M_{衍射}\cdot M_{设计}\cdot M_{加工}$$

$M_{衍射}$为无像差光学系统的传递函数。由下式求出：

$$M_{衍射}=\frac{2}{\pi}[\arccos V_N - V_N\cdot\sin(\arccos V_N)]=0.56。$$

$M_{设计}$是由设计产生的，由于采用三个非球面的三反射镜系统，设计质量可使像质接近衍射极限。因此可给定$M_{设计}=0.9$。为了给定$M_{加工}$，见图 3.22，该图为最基本的像差、球差和传递函数的关系。为了确保$M_{信号}$能达到要求，应尽量提高$M_{加工}$值。但公差太严很难加工，经反复考虑和估算，给定允许由于加工公差(包括装调)产生的波差为λ/4，从图 3.22 可知，与$V_C=0.35$和波差为λ/4 对应的 M 值约为 0.45。而$M_{衍射}=0.56$，因此$M_{加工}=0.8$。于是：

$$M_{光学}=M_{衍射}\cdot M_{设计}\cdot M_{加工}=0.40 \qquad (3.81)$$

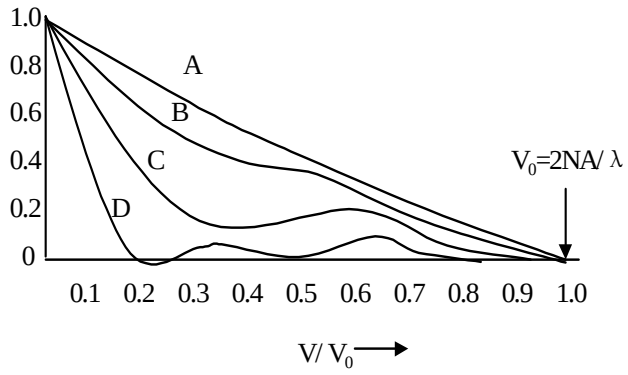


图 3.22 三级球差对 MTF 的影响

(当参考平面处于 marginal 和 paraxial focl.之间)，

曲线 A-LA_m=0，opD=0；

曲线 B-LA_m=4λ/N$\sin^2 u'$，opD=λ/4；

曲线 C-LA_m=8λ/N$\sin^2 u'$，opD=λ/2；

曲线 D-LA_m=16λ/N$\sin^2 u'$，opD=λ。

6)离焦影响

由于卫星在发射过程中的力学环境影响和在轨运行过程中的热影响以及失重变化，而有可能使光学系统产生离焦，因此需加调焦机构进行调焦。给定调焦误差为 0.01mm，CCD 拼接导致的不共面度引起的离焦为 0.01mm，因此总离焦量 $\Delta = 0.02mm$，于是：

$$X = \frac{\pi \cdot \Delta \cdot V_N}{F_\#} = 0.31,$$

$$M_{离焦} = \frac{J_1(X)}{X} = 0.99 \qquad (3.82)$$

其中：$J_1(\cdot)$为一阶贝塞尔函数。另外由于反射镜和镜筒采用了低膨胀系数的熔石英玻璃和碳纤维结构，经计算，温度的波动对离焦几乎不产生影响，可忽略不计。

7)像移的影响

a)CCD 像元在采集光信号过程中产生的像移。CCD 线阵推扫成像相当于狭缝扫描成像，像移量即为 CCD 像元宽度。这种像移是不能补偿的，由此产生的 MTF 为：

$$M_{推扫} = \frac{\sin(\pi \cdot d \cdot V_N)}{\pi \cdot d \cdot V_N} = 0.64。$$

b)可以补偿的像移。主要来自卫星在轨道上的飞行速度，其次是地球的自转和卫星姿态变化速率。由于这些像移都有确定的方向，因此采用了在各像移方向的组合矢量方向上进行像移匹配，即使 TDICCD 时间延迟转移速率和组合矢量方向上的合成速度相匹配来达到同步的方法来补偿像移。但由于相机本身的焦距误差和偏流角误差以及卫星飞行速度、飞行高度、姿态变化角速率、侧视畸变以及 TDICCD 自身的转移速率的控制误差等一系列误差，最终使 TDICCD 行转移速率和实际的地面目标在 CCD 靶面上的像的移动速度不同步，即产生

匹配残余误差，经专题分析给出的 CCD 像移匹配的速度残余误差为：

$$\Delta V_p / V_p = 5.37\times10^{-3}。$$

由此像移匹配残差而得出的 MTF 为：

$$M_{匹配} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{V}{V_N}\cdot M\frac{\Delta V_p}{V_p})}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{V}{V_N}\cdot M\frac{\Delta V_p}{V_p}} = 0.89$$

式中：取特征频率$V = V_N$，TDICCD 级次 M=96。这是沿推扫方向上的 MTF。此外在专题分析中还给出由于偏流角匹配误差产生的横向匹配的残余误差为：

$$\Delta d / d = 2.14\times10^{-3}。$$

由此横向匹配的残余像移产生的 MTF 值为：

$$M_{横向} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{V}{V_N}\cdot M\frac{\Delta d}{d})}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{V}{V_N}\cdot M\frac{\Delta d}{d}} = 0.98 \qquad (3.83)$$

最后得出由于像移产生的 MTF，在扫描方向上为：

$$M_{像移} = M_{推动}\cdot M_{匹配} = 0.57 \qquad (3.84)$$

而在和扫描垂直方向上的 MTF 为 $M_{横向}$。

8)杂光的影响

杂光主要来自视场外的非成像光束，它经过筒壁乱反射后有可能到达像面，使图像的对比降低。因为相机的视场很小，因此进入相机的杂光要比成像光多几千倍，如不注意消除，对图像质量影响很大。这样的杂光可通过加外遮光罩，在筒壁上涂消光漆和加挡光环等措施来消除。在考虑了这些措施后，要求杂光不大于 G=5%(指亮度的平均值)。为算出由杂光

产生的 MTF。首先要算出由到达 CCD 靶面上的成像光束成的图像的调制度。

$$M_{靶面}=M_{目标}\cdot M_{大气}\cdot M_{光学}\cdot M_{离焦}\cdot M_{像移}=0.048 \qquad (3.85)$$

图 3.23 中虚线即为有杂光时的曲线，和无杂光的实线曲线相比，信号和背景都增加了同一个亮度值。和 $M_{靶面}=0.048$ 对应的对比为：

$$M_{靶面}=\frac{1+0.048}{1-0.048}=1.10$$

则有了杂光后的调制度为：

$$M_{靶面}=\frac{C_{靶面}-1}{C_{靶面}+1+2G}=0.046 \qquad (3.86)$$

相应得:

$$M_{杂光}=\frac{0.046}{0.048}=0.94 \qquad (3.87)$$

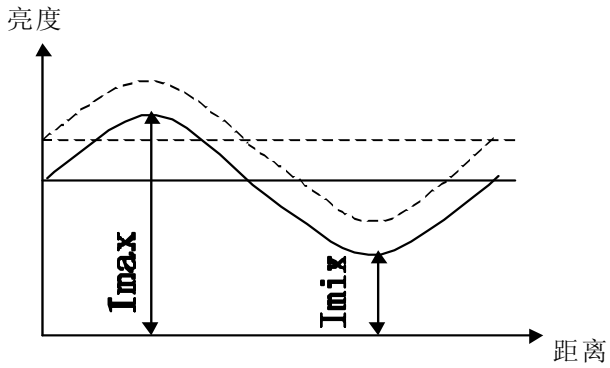


图 3.23 杂光对对比的影响

9)CCD 的影响

除在前面提到的 $M_{推扫}$ 和 $M_{匹配}$ 外还有三种影响，主要是像元之间的信号串扰，它的影响随波长的增加而迅速增加。由图 3.24 可得，当 $\lambda=700nm$， $M_{串扰}=0.6$。其次是电荷传递失效和电荷传递的不连续性，根据文献，后两项可分别给定 0.96 和 0.97。于是得出：

$$M_{CCD} = M_{串扰} \times M_{失效} \times M_{不连续} = 0.6 \times 0.96 \times 0.97 = 0.56 \quad (3.88)$$

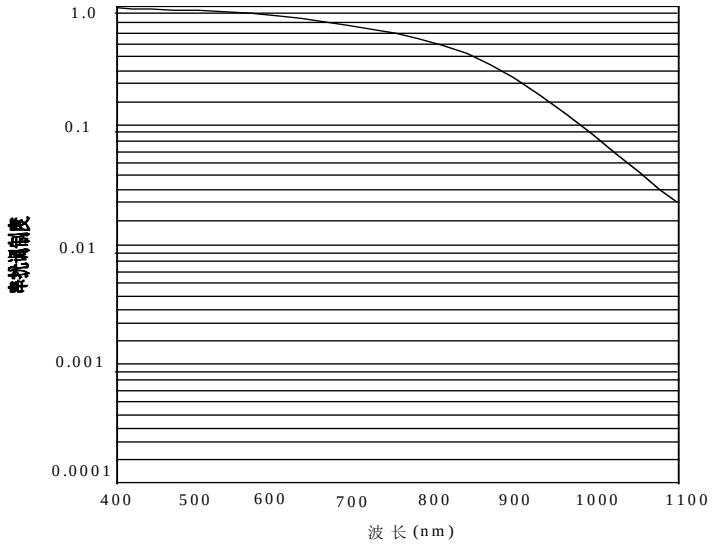


图 3.24 典型串扰影响

10)温度梯度的影响

主要影响的是像差。对于我们采用的非共轴三反射镜系统，第一块反射镜口径很大，因此受温度梯度影响最大。其它两块口径小得多，因而影响要小很多。因此只考虑第一块反射镜就可说明问题。其口径为 600mm，且孔径光栏设在其上。又设反射镜厚为 60mm。采用低膨胀系数的熔石英玻璃，膨胀系数为 2.1×10^{-7}。又给定反射镜边缘与中心的温差为 1℃。则产生的波差为：

$$W = \frac{2\times60\times2.1\times10^{-7}}{0.0007} = 0.036\lambda$$

接近 λ/30，实际上的温度梯度要比 1℃小得多，因此温度梯度的影响可忽略不计。此外，反射镜还不受气压变化的影响。

11)方波传递函数和正弦传递函数

检验光学系统用的分辨力板和检验卫星摄影地面分辨力用的分辨力条带都是一黑一白的方波函数，而计算的传递函数和传递函数检测都是对正弦波而言，因此需将正弦波传递

函数 M(V_C)转换成方波传递函数 S(V_C)。两者的关系为：

$$M(V_C)=\frac{\pi}{4}[S(V_C)-\frac{S(3V_C)}{3}+\frac{S(5V_C)}{5}\cdots\cdots]$$

因 V_C=0.35，因此括号内从第二项起都为零。所以：

$$S(V_C)=\frac{4}{\pi}M(V_C)=1.27M(V_C) \qquad (3.89)$$

12)相机给出的视频信号的调制度，反衬度和对比度

至此可求出对比为 2:1 的地面目标在经过相机后传输给地面的视频信号的调制度为：

$$M_{信号}=M_{靶面}\cdot M_{杂光}\cdot M_{CCD}\cdot 127=0.032 \qquad (3.90)$$

对比度和反衬度为:

$$C_{信号}=\frac{1+M_{信号}}{1-M_{信号}}=0.066 \qquad (3.91)$$

$$C_{0信号}=C_{信号}+1=1.066 \qquad (3.92)$$

以上计算结果及其它四种目标对比计算结果见表 3.4。

表 3.4 各种目标对比的计算结果

目标对比 C			2:1	4:1	6:1	20:1	1000:1
$M_{目标}$			0.33	0.60	0.71	0.90	0.998
$M_{目标}$、$M_{大气}$			0.21	0.45	0.57	0.84	0.996
$M_{光学}$	$M_{衍射}$ $M_{设计}$ $M_{加工}$		0.56 0.98 0.81				
$M_{离焦}$			0.99				
	纵向	$M_{推扫}$	0.64				
		$M_{匹配}$	0.89				
	$M_{横向}$		0.98				
$M_{杂光}$			0.954	0.957	0.958	0.961	0.963
M_{CCD}	$M_{串扰}$ $M_{失效}$ $M_{不连续}$		0.60 0.96 0.97				
$M_{信号}$、正弦波		纵向	0.025	0.054	0.068	0.100	0.120
		横向	0.043	0.092	0.116	0.172	0.203
$M_{信号}$、方波		纵向	0.032	0.069	0.086	0.127	0.153
		横向	0.057	0.117	0.147	0.220	0.258
$C_{信号}$		纵向	0.066	0.148	0.188	0.291	0.358
		横向	0.121	0.265	0.345	0.564	0.700
$C_{0信号}$		纵向	1.066	1.148	0.188	1.291	1.359
		横向	1.121	1.256	0.345	1.564	1.700

本章主要参考书目

[1]嘉纳秀明，[日]《现代控制工程学》-动态系统的分析和控制，上海交。通大学出版社，1991 年。

[2]王其祥编著，《工程光学原理》，江苏科学技术出版社，1983 年。

[3]蒋筑英、李剑白、向才新、刘瑞祥等著，《光学系统成象质量评价及极验文集》，中国计量出版社，1988 年。

[4]张云熙，《大气调制传递函数的计算》，舰船光学，第 4 期，1984 年。

[5][美]无线电公司，《电光学手册》，国防工业出版社，1978 年。

[6]史光辉、王家骐，《CCD 详查相机综合传递函数分析论证报告》，中国科学院长春光机所内部报告，1996 年 12 月。

§4 光学仪器中的坐标变换

4.1 用齐次坐标表示的三维图形的坐标变换

用一个(n+1)维的分向量来表示一个 n 维的分向量的方法称为“齐次坐标表示法”。例把三维空间一个点 P 的直角坐标(x、y、z)表示成齐次坐标，则为(W_x、W_y、W_z、W)。它与普通直角坐标的关系，可用下列式子进行换算：

$$x = w_x / w, \quad y = w_y / w, \quad z = w_z / w \text{。}$$

1) 图形以原点为中心的放大(缩小)

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x x \\ S_y y \\ S_z z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

图形以原点为中心，在 x、y、z 方向上分别放大(缩小)S_x、S_y、S_z倍。

2)图形平移

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & e \\ 0 & 1 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+e \\ y+f \\ z+g \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

图形在 x、y、z 方向分别移动 e、f、g。或者说坐标系原点相对图形在 x、y、z 方向分别移动-e、-f、-g。

3)图形绕 x 轴旋转

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \cos\ \theta y - \sin\ \theta z \\ \sin\ \theta y + \cos\ \theta z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

即 $x' = x; \quad y' = \cos\theta y - \sin\theta z; \quad z' = \sin\theta y + \cos\theta z$ 。

此时也可视作坐标系相对图形绕 x 轴旋转“-θ”角之后的结果。

4)图形绕 y 轴旋转

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\ \theta x + \sin\ \theta z \\ y \\ -\sin\ \theta x + \cos\ \theta z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

即 $x' = \cos\theta x + \sin\theta z, \quad y' = y, \quad z' = -\sin\theta x + \cos\theta z$ 。

此时也可视作坐标系相对图形绕 y 轴旋转“-θ”角之后的结果。

5)图形绕 z 轴旋转

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\ \theta x - \sin\ \theta y \\ \sin\ \theta x + \cos\ \theta y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

即 $x' = \cos\theta x - \sin\theta y, \quad y' = \sin\theta x + \cos\theta y, \quad z' = z$ 。

此时也可视作坐标系相对图形绕 z 轴旋转“-θ”角之后的结果。

6)物体关于物镜成像的坐标变换

$$\begin{bmatrix} -f'/z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f'/z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f'/(z-f') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f'x/z \\ -f'y/z \\ -f'/(1-\dfrac{f'}{z}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

其中：f′ --物镜的焦距

即 $x' = -\dfrac{f'}{z}x, \quad y' = -\dfrac{f'}{z}y, \quad z' = -f'/(1-f'/z)$ 。

以上只列出光轴与 z 轴重合的变换，光轴与 x 轴或 y 轴重合时的变换矩阵不难写出。

7)小结

三维齐次坐标的一般变换矩阵可以表达成下列形式：

$$T=\begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} & 3\times 3 & & 3\times 1 \\ \hline 1\times 3 & & & 1 \end{array}\right],$$

将 4×4 变换矩阵分割为四个分块，其中：

3×3 矩阵产生比例变换、错切和旋转；

3×1 矩阵产生平移；

1×3 矩阵产生透视变换；

1×1 矩阵产生全部的比例变换。

4.2 光路转折

1)平面反射镜的光路转折

对于平面反射镜，其出射光线 A_2 和入射光线 A_1 之间的关系如图 4.1 a)所示。其表达式为：

$$A_2 = HA_1 \tag{4.7}$$

其中 H 为反射矩阵：

$$H = 1-2NN^T \tag{4.8}$$

而 N 为平面反射镜的法线单位向量。

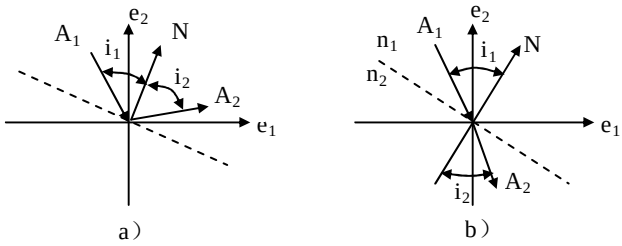


图 4.1 光线在界面处的反射和折射光路

2)平面折射界面的光路转折

对于平面折射界面，其出射光线 A_2 和入射光线 A_1 之间，可以认为是 A_2 相对于 A_1 作一旋转的线性变换，其关系如图 4.1 b)所示。而其表达式为：

$$A_2 = MA_1 \tag{4.9}$$

其中：M 为折射界面的折射作用矩阵:

$$M=\begin{pmatrix}\cos(i_2-i_1) & -\sin(i_2-i_1) & 0\\ \sin(i_2-i_1) & \cos(i_2-i_1) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{4.10}$$

而:

$$\left.\begin{aligned} i_1&=\cos^{-1}(-N^T A_1)\\ i_2&=\sin^{-1}(\frac{n_2}{n_1}\sin i_1)\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

N 为界面法线向量。

3)望远系统的光路转折

对于正倍望远系统，可以视作一个折射界面，其出射光线 A_2 和入射光线 A_1 之间也可以认为是 A_2 相对于 A_1 作一线性旋转变换，其关系如图 4.2 a)所示。而表达式即(4.9)式：

$$A_2 = MA_1$$

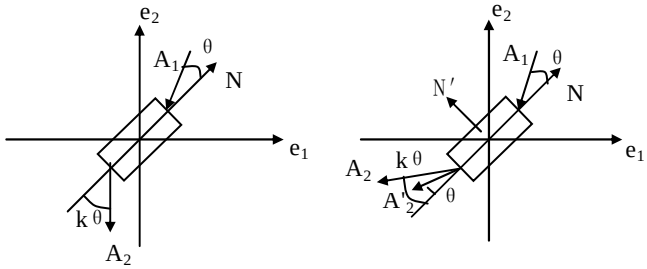
不同之处在于其作用矩阵为：

$$M=\begin{pmatrix}\cos(k-1)\theta & -\sin(k-1)\theta & 0\\ \sin(k-1)\theta & \cos(k-1)\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{4.12}$$

其中：$\theta=\cos^{-1}(-N^T A)$；

k—望远系统的倍率；

N—望远系统光轴的单位向量。



a)正倍系统　　b)负倍系统

图 4.2 望远系统光路

对于负倍系统，其出射光线 A_2 和入射光线 A_1 之间可以认为是反射镜面和折射界面二次作用的结果，关系如图 4.2 b)所示。表达式为：

$$A_2 = MHA_1 \tag{4.13}$$

其中：

$$M=\begin{pmatrix} \cos(k-1)\theta & -\sin(k-1)\theta & 0 \\ \sin(k-1)\theta & \cos(k-1)\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$H = 1-2N'N'^{T},$$

而：N′ 为与 N 和 A_1 共面，并与 N 正交的单位向量。

其实只要把 k 的负值代入(4.12)式，也可得到负倍系统的作用矩阵。

4.3 平台调平误差引起的瞄准误差分析

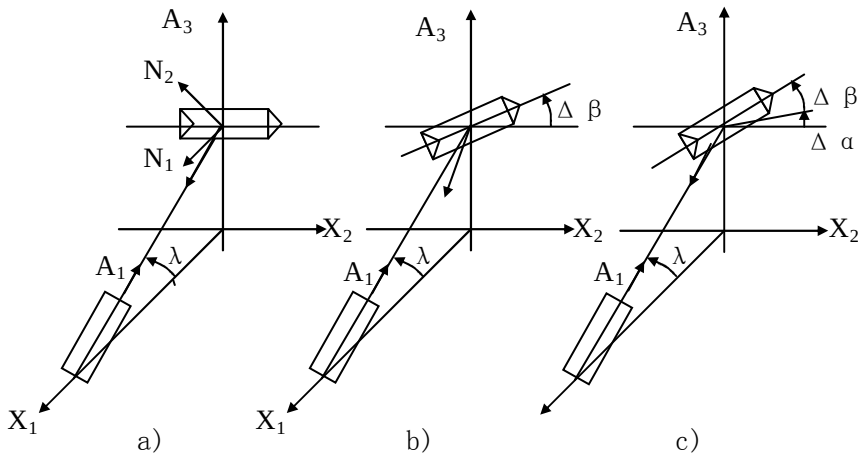


图 4.3 陆基光电瞄准原理图

当表征平台方位的平台棱镜(二次反射直角棱镜或称波罗棱镜)无调平误差时如图`4.3 a)所示，二反射面交棱 y 与 x_2 轴平行，此时当平台棱镜与光电瞄准仪自准时，光电瞄准仪

将原始方位无误差地传递到平台棱镜。但如图 4.3 b)所示，当平台棱镜存在调平误差 Δ β (即 y 棱绕 x_1 轴旋转 Δ β 角)时，A_1 光线经过平台棱镜反射后的光线 A_3 在方位平面内将构成偏差角。瞄准时，必须构成自准，即控制平台在方位上转动，如图 4.3 c)所示，设平台方位上调正 Δ α 角后，A_3 与 A_1 在方位平面内平行，此 Δ α 角即为由于平台调平误差引起的瞄准误差。

首先如图 4.3 a)中平台棱镜二反射面的单位法矢量为：

$$N_1=\begin{bmatrix}\cos\pi/4\\0\\-\sin\pi/4\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad N_2=\begin{bmatrix}\cos\pi/4\\0\\\sin\pi/4\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

而光电瞄准仪光电自准光管的光轴 A_1 的单位矢量为：

$$A_1=\begin{bmatrix}-\cos\lambda\\0\\\sin\lambda\end{bmatrix}。$$

如图 4.3 c)所示，此时平台棱镜的法线单位矢量可以视作首先绕 x_3 旋转 Δ α 角后，再绕 x_1 轴旋转 Δ β 角，两次旋转变换后的平台棱镜法线单位矢量将分别为：

$$N_1'=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\Delta\beta&-\sin\Delta\beta\\0&\sin\Delta\beta&\cos\Delta\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\Delta\alpha&-\sin\Delta\alpha&0\\\sin\Delta\alpha&\cos\Delta\alpha&0\\0&0&1\end{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\cos\Delta\alpha\\\sin\Delta\alpha\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta\\\sin\Delta\alpha\sin\Delta\beta-\cos\Delta\beta\end{bmatrix};$$

$$N_2'=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\Delta\beta&-\sin\Delta\beta\\0&\sin\Delta\beta&\cos\Delta\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\Delta\alpha&-\sin\Delta\alpha&0\\\sin\Delta\alpha&\cos\Delta\alpha&0\\0&0&1\end{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \cos\Delta\alpha \\ \sin\Delta\alpha\cos\Delta\beta - \sin\Delta\beta \\ \sin\Delta\alpha\sin\Delta\beta + \cos\Delta\beta \end{bmatrix}。$$

根据公式(4.7)和(4.8)，光线 A_1 经 N'_1 反射后的光线 A_2 为：

$$A_2 = (1 - 2N'_1 \cdot N'^T_1) \cdot A_1；$$

A_2 经 N'_2 反射后的光线 A_3 为：

$$A_3 = (1 - 2N'_2 \cdot N'^T_2) \cdot (1 - 2N'_1 \cdot N'^T_1) A_1。$$

由于 N'_2 与 N'_1 正交，故有：

$$A_3 = (1 - 2N'_2 \cdot N'^T_2 - 2N'_1 \cdot N'^T_1) A_1 \qquad (4.14)$$

将 N'_1、N'^T_1 和 N'_2、N'^T_2，以及 A_1 值代入可得：

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\cos 2\Delta\alpha & -\sin 2\Delta\alpha\cos\Delta\beta & -\sin 2\Delta\alpha\sin\Delta\beta \\ -\sin 2\Delta\alpha\cos\Delta\beta & \cos 2\Delta\alpha\cos^2\Delta\beta - \sin^2\Delta\beta & \cos^2\Delta\alpha\sin 2\Delta\beta \\ -\sin 2\Delta\alpha\sin\Delta\beta & \cos^2\Delta\alpha\sin 2\Delta\beta & \cos 2\Delta\alpha\sin^2\Delta\beta - \cos^2\Delta\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\lambda \\ 0 \\ \sin\lambda \end{bmatrix},$$

即：

$$A_3 = \begin{bmatrix} A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\ 2\Delta\alpha\cos\ \lambda - \sin\ 2\Delta\alpha\sin\ \Delta\beta\sin\ \lambda \\ \sin\ 2\Delta\alpha\cos\ \Delta\beta\cos\ \lambda + \cos^{\ 2}\Delta\alpha\sin\ 2\Delta\beta\sin\ \lambda \\ \sin\ 2\Delta\alpha\sin\ \Delta\beta\cos\ \lambda + \cos\ 2\Delta\alpha\sin^{\ 2}\Delta\beta\sin\ \lambda - \cos^{\ 2}\Delta\beta\sin\ \lambda \end{bmatrix}$$

(4.15)

由于只有当 A_{32}=0 时，满足自准条件，即：

$$\sin 2\Delta\alpha\cos\Delta\beta\cos\lambda + \cos^2\Delta\alpha\sin 2\Delta\beta\sin\lambda = 0。$$

最后可得：

$$\tan\Delta\alpha = -\sin\Delta\beta \cdot \tan\lambda ,$$

$$\Delta\alpha = \arctan(-\sin\Delta\beta \cdot \tan\lambda) \qquad (4.16)$$

当Δα和Δβ都是小角度时，可以简化为：

$$\Delta\alpha = -\Delta\beta \cdot \tan\lambda \qquad (4.17)$$

表 4.1

Δα		λ							
		1°	2°	5°	10°	12°	14°	16°	18°
Δβ	30″	0.52″	1.05″	2.62″	5.29″	6.38″	7.48″	8.60″	9.75″
	1′	1.05″	2.09″	5.25″	10.58″	12.75″	14.96″	17.20″	19.49″
	2′	2.09″	4.19″	10.50″	21.16″	25.51″	29.92″	34.41″	38.99″
	3′	3.14″	6.28″	15.75″	31.74″	38.26″	44.88″	51.61″	58.48″

表4.1为用(4.17)式计算的不同高角λ和调平误差Δβ时的方位瞄准误差Δα值，表中，λ=10°，相当于从 30m 处校正 5m 高导弹的原始方位，而λ=18°时，相当于 300m 处校正 100m 高火箭的原始方位。

以上仅分析了当二次反射棱镜两个反射面完全正交的情况，实际上两个反射面存在的不正交误差和二次反射棱镜存在的塔差(即两个反射面交棱和棱镜的折射面不平行误差)与平台调平误差耦合后还会产生瞄准误差。在瞄准系统的误差分析中还应详细地分析，并根据允许的瞄准误差来分配二次反射棱镜的直角误差和塔差。

4.4 折转光管位置装调误差引起的方位传递误差分析

如图 4.4 a)，在光电瞄准和潜望镜中用两块在空间平行的平面反射镜组成一个折转光管，使光路折转一个距离，但保持其方向。

设两平行平面反射镜法线分别为 N_1 和 N_2。当 N_1 和 N_2 严格平行时，如图 4.4 b)所示，无论折转光管安装误差(例倾斜β角)多大，都不会产生方位上的传递误差，即射进和射出的光线 A_1 和 A_3 之间在空间上将始终保持平行。但当 N_1 和 N_2 之间由

于安装或结构上的变形形成误差的话，则折转光管的安装误差耦合作用的结果，将会造成方位上的传递误差。以下分析如图 4.4 c)所示情况，N_1和 N_2之间存在Δ β 角误差，而整个折转光管又在 X_2X_3平面内侧向倾β 角后形成的方位传递误差。

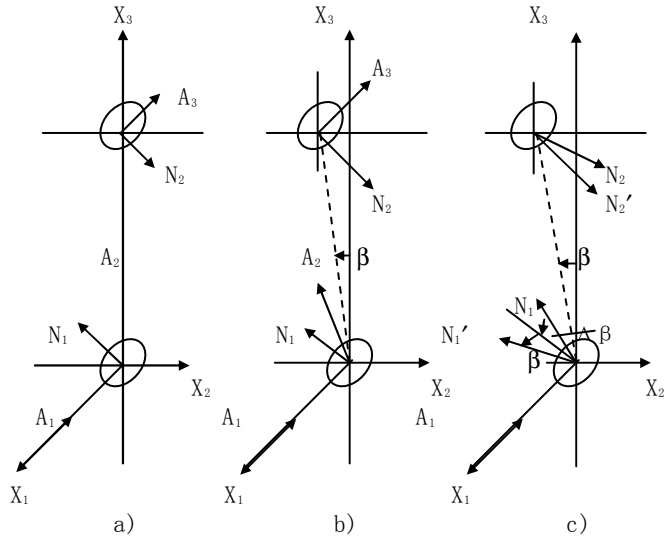


图 4.4 折转光管方位传递原理图

首先如图 4.4 a)所示，二反射镜面单位法矢量分别为：

$$N_1=\begin{bmatrix}\cos\pi/4\\0\\\sin\pi/4\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix};\quad N_2=\begin{bmatrix}\cos\pi/4\\0\\-\sin\pi/4\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix};$$

传递方位的光线 A1 的单位矢量为:

$$A_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}。$$

然后如图 4.4 c)所示，当折转光管两平面反射镜法线之间存在不平行误差Δ β 和装调偏差β 角后，两反射镜法线单位矢量 N_1' 和 N_2' 分别为：

$$N_1'=M_2\cdot M_1\cdot N_1;\quad N_2'=M_2\cdot N_2,$$

其中：

$$M_1=\begin{bmatrix}\cos\Delta\beta & 0 & \sin\Delta\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\Delta\beta & 0 & \cos\Delta\beta\end{bmatrix};\quad M_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta\\ 0 & \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix};$$

则有：

$$N_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta\\ -\sin\beta(\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta)\\ \cos\beta(\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta)\end{bmatrix};$$

$$N_2'=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-1\\ \sin\beta\\ -\cos\beta\end{bmatrix}。$$

从折转光管出射的光线 A_3 为：

$$A_3=(I-2N_2'\cdot N_2'^T)(I-2N_1'\cdot N_1'^T)\cdot A_1$$

其中：$I-2N_1'\cdot N_1'^T$

$$=\begin{bmatrix}1-(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta)^2 & \sin\beta(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta) & -\cos\beta(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta)\\ & (\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta) & (\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta)\\ \sin\beta(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta) & 1-\sin^2\beta(\sin\Delta\beta-\cos\Delta\beta)^2 & \sin\beta\cos\beta(\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta)^2\\ (\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta) & & \\ -\cos\beta(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta) & \sin\beta\cos\beta(\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta)^2 & 1-\cos^2\beta(\sin\Delta\beta-\cos\Delta\beta)^2\\ (\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta) & & \end{bmatrix};$$

$$A_2=\begin{bmatrix}(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta)^2-1\\ -\sin\beta(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta)(\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta)\\ \cos\beta(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta)(\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta)\end{bmatrix}。$$

而：　$I-2N_2'\cdot N_2'^T$

$$=\begin{bmatrix}0 & \sin\beta & -\cos\beta\\ \sin\beta & \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta\\ -\cos\beta & \sin\beta\cos\beta & \sin^2\beta\end{bmatrix};$$

$$A_3=\begin{bmatrix}A_{31}\\A_{32}\\A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(\cos^2\beta+\sin^2\beta)(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta)(\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta)\\ \sin\beta[(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta)^2-1]-\sin\beta\cos^2\beta(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta)(\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta)\\ +\sin\Delta\beta\cos^2\Delta\beta(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta)(\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta)\\ \cos\beta[1-(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta)^2]-\sin^2\beta\cos\beta(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta)(\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta)\\ +\sin^2\beta\cos\beta(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta)(\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta)(\cos\Delta\beta-\sin\Delta\beta)\\ \sin\beta[(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta)^2-1]\\ \cos\beta[1-(\cos\Delta\beta+\sin\Delta\beta)^2]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\cos 2\Delta\beta\\ \sin\beta\sin 2\Delta\beta\\ -\cos\beta\sin 2\Delta\beta\end{bmatrix}。$$

A_3和A_1在方位上的误差角Δα可由下式求出：

$$\tan\Delta\alpha=A_{32}/A_{31}=-\sin\beta\frac{\sin 2\Delta\beta}{\cos 2\Delta\beta},$$

即：$\Delta\alpha=\arctan(-\tan 2\Delta\beta\cdot\sin\beta)$ （4.18）

当Δβ和Δα都为小角误差时，可以简化为：

$$\Delta\alpha=-2\Delta\beta\cdot\sin\beta \quad (4.19)$$

以上仅仅分析了折射光管在X_2X_3平面内倾斜安装误差耦合后引起的方位传递误差，在瞄准系统的误差分析中，还要考虑折射光管在X_1X_3平面内的倾斜安装误差和在X_1X_2平面内的扭转安装误差耦合后引起的方位传递误差。

4.5 瞄准中构件水平面内变形自动补偿分析

为了实现一组多个平台方位的实时校正，我们使用了一个与特大构件纵轴平行的带有光源的平行光管(称基准光管)。在每一平台上放置一块表征被校正平台方位的二次反射棱镜，其棱脊处于方位平面内。在每一平台的前方按放校正

仪。该校正仪内布置了一组正交的平面反射镜，用来分光和使光路转折；一个光电接收平行光管，用来实时测量平台相对构件纵轴的偏差角；和一个与该光电接收平行光管正交的正二倍望远系统，组成一个复合的光路转折系统，自动地补偿构件变形对校正的影响，图 4.5 为其光路示意图。

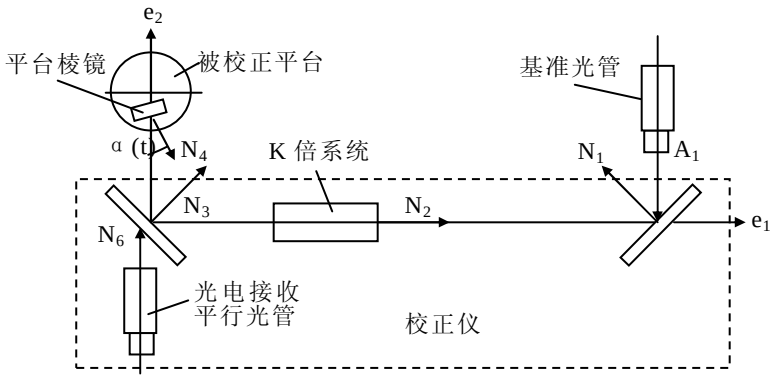


图 4.5 校正仪复合光路示意图

图中 e_2 为构件纵轴，e_1 和 e_2 组成方位平面。A_1 为基准平行光管光轴，即为构件纵轴、也是基准光管发出光束的单位向量。N_1 和 N_3 为校正仪内相互正交的一组平面反射镜法线的单位向量；N_2 为正 k 倍望远镜光轴的单位矢量，N_4 为表征被校正平台方位的二次反射棱镜交棱在方位平面内法线的单位矢量，与构件纵轴(即 A_1)的偏差为 $\alpha(t)$。

本文分析时，为了计算方便，N_2 与 N_1 和 N_3 分别成 $\pi/4$ 角。当构件无变形时，各单位向量分别为：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$N_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$N_4=\begin{bmatrix}\sin\alpha t\\ -\cos\alpha t\end{bmatrix}；$$

$$N_6=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}。$$

设构件在水平面内，相应基准光管和校正仪二个安装点有变形角α_0，则校正仪相对基准光管旋转α_0角。为了计算方便，设基准光管光轴和平台台体(即A_1和N_1)反方向旋转“$-\alpha_0$”角。各单位向量的关系如图 4.6 所示。

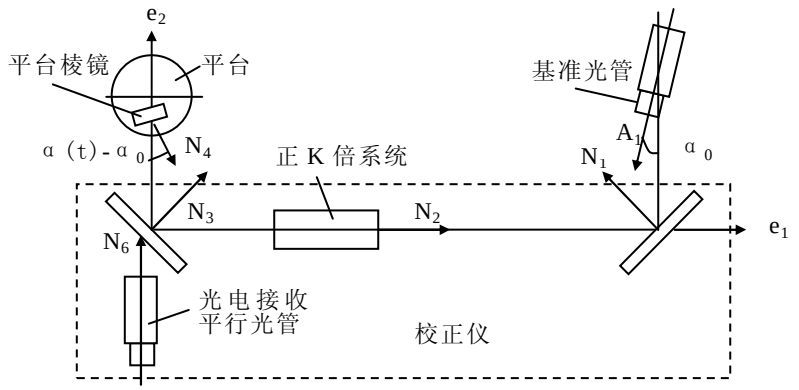


图 4.6 构件沿纵轴在方位平面内变形后光路示意图

而各单位向量为：

$$A_1=\begin{bmatrix}\cos a_0 & \sin a_0\\ -\sin a_0 & \cos a_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin a_0\\-\cos a_0\end{bmatrix}；$$

$$N_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}；$$

$$N_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}；$$

$$N_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}；$$

$$N_4=\begin{bmatrix}\cos a_0 & \sin a_0\\ -\sin a_0 & \cos a_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin at\\ -\cos at\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin(at-a_{0)}\\ -\cos(at-a_{0)}\end{bmatrix}\ ;$$

$$N_6=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\ 。$$

光束 A_1 经平面镜 N_1 反射后为：

$$A_2=(I-2N_1N_1^T)A_1=\begin{bmatrix}-\cos a_0\\ -\sin a_0\end{bmatrix},$$

$\because\quad N_2^TA_2=-\cos a_0$ ，

$\therefore\quad \theta=a_0$，即 A_2 与 k 倍望远系统光轴夹角为 a_0。

A_2 经 k 倍望远系统后为：

$$A_3=MA_2=\begin{bmatrix}\cos(k-1)a_0 & -\sin(k-1)a_0\\ \sin(k-1)a_0 & \cos(k-1)a_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\cos a_0\\ -\sin a_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\cos ka_0\\ -\sin ka_0\end{bmatrix}$$

A_3 经平面镜 N_3 反射后为：

$$A_4=(I-2N_3N_3^T)A_3=\begin{bmatrix}\sin ka_0\\ \cos ka_0\end{bmatrix}$$

A_4 经平面镜 N_4 反射后为：

$$A_5=(I-2N_4N_4^T)A_4=\begin{bmatrix}\sin\{2[a(t)-a_0]+ka_0\}\\ -\cos\{2[a(t)-a_0]+ka_0\}\end{bmatrix}$$

光电接收平行光管测量的工件台体相对构件纵轴的偏差角为：

$$2a'(t)=2(a(t)-a_0)+ka_0 \qquad (4.20)$$

由(4.20)式知，当 k=2 时，$a'(t)=a(t)$。说明校正仪采用正二倍系统后，实时测量值与 a_0 无关，自动补偿了构件变形。

以上分析的校正仪内的平面反射镜组和正二倍系统的相对位置关系不是唯一的。如果作如图 4.7 的布置，同时可以实现平台的侧向方位实时测量，此时两平面反射法线之间的夹角为$3\pi/4$，而光电接收平行光管与正二倍系统之间的夹角为$\pi/4$。

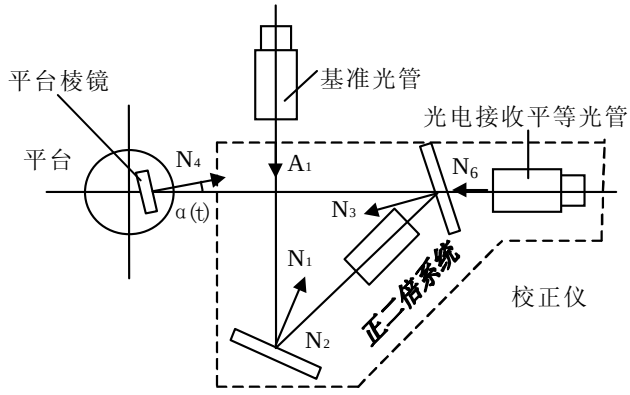


图 4.7 侧向方位实时校正时的光路

4.6 构件在中纵剖面内变形耦合后引起的方位自校正误差分析

以上分析，仅仅作为平面问题来处理，分析了构件在水平面内的变形，而实际问题复杂得多，为一空间问题，还必须分析其它二个转角(可以是构件变形造成，也可以是校正仪安装误差造成)对实时测量的影响。以下分析校正仪相对构件坐标系其它二个轴有角偏移时对测量结果的影响。图 4.8 示意了在三维情况下，各单位向量的情况，其中表征平台台体方位的棱镜棱边单位法线改换成了二个相互正交的反射面单位法向量N_4和N_5。e_2轴为构件纵轴，e_1和e_2组成构件水平面，

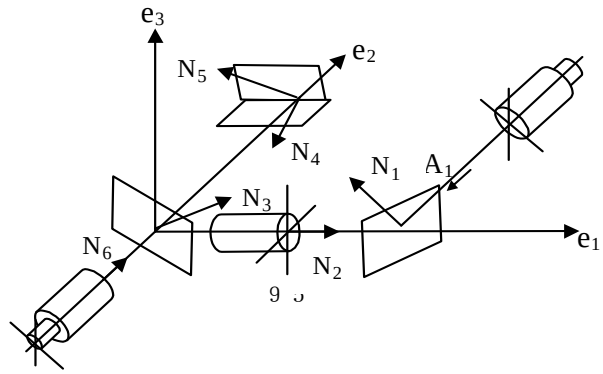


图 4.8 三维时的光路图

e_2和e_3组成构件的中纵剖面，其途单位向量与前相同。

当构件无变形时，各单位向量分别为：

$$A_1=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}；$$

$$N_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}；$$

$$N_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}；$$

$$N_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}；$$

$$N_4=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\sin a(t)\\-\cos a(t)\\-1\end{bmatrix}；$$

$$N_5=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\sin a(t)\\-\cos a(t)\\1\end{bmatrix}；$$

$$N_6=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}。$$

为了分析上的方便，设A_1和N_4、N_5在水平面内绕e_3轴旋转“$-a_0$”角，然后在中纵剖面内旋转“$-\lambda_0$”角。其旋转作用矩阵分别为：

$$\begin{bmatrix}\cos a_0 & \sin a_0 & 0\\-\sin a_0 & \cos a_0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}和\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\lambda_0 & \sin\lambda_0\\0 & -\sin\lambda_0 & \cos\lambda_0\end{bmatrix}$$

a_0和λ_0分别为构件在水平面和中纵剖面内，相应于基准光管和校正仪安装点之间构件的挠曲变形角或为校正仪的安

装误差角。

变形后，各单位向量分别为：

$$A_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\lambda_0&\sin\lambda_0\\0&-\sin\lambda_0&\cos\lambda_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos a_0&\sin a_0&0\\-\sin a_0&\cos a_0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin a_0\\-\cos a_0\cos\lambda_0\\\cos a_0\sin\lambda_0\end{bmatrix};$$

$$N_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix};$$

$$N_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix};$$

$$N_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix};$$

$$N_4=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\lambda_0&\sin\lambda_0\\0&-\sin\lambda_0&\cos\lambda_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos a_0&\sin a_0&0\\-\sin a_0&\cos a_0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin a(t)\\-\cos at\\-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\sin(a(t)-a_0)\\-\cos[a(t)-a_0]\cos\lambda_0-\sin\lambda_0\\\cos[a(t)-a_0]\sin\lambda_0-\cos\lambda\end{bmatrix};$$

$$N_5=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\lambda_0&\sin\lambda_0\\0&-\sin\lambda_0&\cos\lambda_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos a_0&\sin a_0&0\\-\sin a_0&\cos a_0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin a(t)\\-\cos a(t)\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\sin[a(t)-a_0]\\-\cos[a(t)-a_0]\cos\lambda_0+\sin\lambda_0\\\cos[a(t)-a_0]\sin\lambda_0+\cos\lambda_0\end{bmatrix};$$

$$N_6=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}。$$

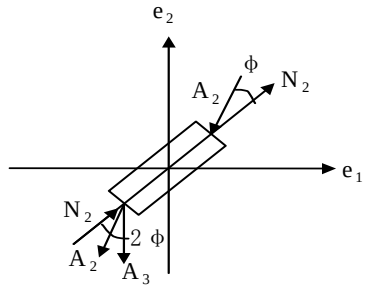


图 4.9 正二倍望远系统光路转折

A_1经平面镜 N_1反射后为：

$$A_2=(I-2N_1N_1^T)A_1。$$

A_2经正二倍系统后，出射光线为 A_3。应用坐标旋转矩阵计算 A_3会很复杂。在正二倍的特殊情况下(参看图 4.9)，作反射矩阵为：

$$H_2=I-2A_2A_2^T \qquad (4.21)$$

则 A_3可以视为是 N_2经 H_2线性变换的结果，有：

$$A_3=H_2N_2=[I-2A_2A_2^T]N_2=[I-2(I-2N_1N_1^T)A_1A_1^T(I-2N_1N_1^T)^T]N_2,$$

A_3经平面镜 N_3反射后为：

$$A_4=(I-2N_3N_3^T)A_3=(I-2N_3N_3^T)$$
$$[I-2(I-2N_1N_1^T)A_1A_1^T(I-2N_1N_1^T)^T]N_2,$$

A_4经平面镜 N_4反射后为：

$$A_5=(I-2N_4N_4^T)A_4=(I-2N_4N_4^T)(I-2N_3N_3^T)$$
$$[I-2(I-2N_1N_1^T)A_1A_1^T(I-2N_1N_1^T)^T]N_2,$$

A_5经平面镜 N_5反射后为：

$$A_6=(I-2N_5N_5^T)A_5=(I-2N_5N_5^T)(I-2N_4N_4^T)(I-2N_3N_3^T)$$
$$[I-2(I-2N_1N_1^T)A_1A_1^T(I-2N_1N_1^T)^T]N_2。$$

因为 N_5与 N_4、N_1与 N_3分别二面正交，所以有：

$$A_6=(I-2N_5N_5^T-2N_4N_4^T)[I-2N_3N_3^T$$
$$-2(I-2N_1N_1^T)A_1A_1^T(I-2N_1N_1^T)^T]N_2 \quad (4.22)$$

而光电接收平行光管测量结果为：

$$2a_{\lambda 0}(t)=\arctan(a_{61}/-a_{62}) \qquad (4.23)$$

其中：a_{61}和a_{62}为$A_6=[a_{61}a_{62}a_{63}]^T$的二个分量。

把变形后的各向量代入(4.22)式可计算得A_6：

$$A_1A_1^T=\begin{bmatrix}\sin^2 a_0 & \sin a_0\cos a_0\cos\lambda_0 & -\sin a_0\cos a_0\sin\lambda_0\\ \sin a_0\cos a_0\cos\lambda_0 & \cos^2 a_0\cos^2\lambda_0 & -\cos^2 a_0\sin\lambda_0\cos\lambda_0\\ -\sin a_0\cos a_0\sin\lambda_0 & -\cos^2 a_0\cos\lambda_0\sin\lambda_0 & \cos^2 a_0\sin^2\lambda_0\end{bmatrix};$$

$$I-2N_1N_1^T=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix};$$

$$[I-2N_1N_1^T]^T=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix};$$

$$I-2N_3N_3^T=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix};$$

$$I-2N_1N_1^T-2N_3N_3^T=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix};$$

$$I-2N_3N_3^T-2(I-2N_1N_1^T-2N_3N_3^T)A_1A_1^T(I-2N_1N_1^T)^T]N_2$$

$$=\begin{bmatrix}2\sin a_0\cos a_0\cos\lambda_0\\ 2\cos^2 a_0\cos^2\lambda_0-1\\ 2\cos^2 a_0\cos\lambda_0\sin\lambda_0\end{bmatrix};$$

$$I-2N_4N_4^T-2N_5N_5^T$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 2[a(t)-a_0] & \sin 2[a(t)-a_0]\cos\lambda_0 & -\sin 2[a(t)-a_0]\sin\lambda_0\\ -\sin 2[a(t)-a_0]\cos\lambda_0 & 1-2\cos^2[a(t)-a_0]\cos\lambda_0 & 2\cos^2[a(t)-a_0]\sin\lambda_0\cos\lambda_0\\ & -\sin^2\lambda_0 & -2\sin\lambda_0\cos\lambda_0\\ -\sin 2[a(t)-a_0]\sin\lambda_0 & 2\cos^2[a(t)-a_0]\sin\lambda_0\cos\lambda_0 & 1-2\cos^2[a(t)-a_0]\sin^2\lambda_0\\ & -2\sin\lambda_0\cos\lambda & -\cos^2\lambda_0\end{bmatrix},$$

由此可得：

$$A_6=\begin{bmatrix}\sin 2[a(t)-a_0]\cos\lambda_0(2\cos^2 a_0\cos 2\lambda_0-1)\\+\cos 2[a(t)-a_0]\sin 2a_0\cos\lambda_0\\\cos 2[a(t)-a_0]\cos^2\lambda_0(1-2\cos^2 a_0\cos 2\lambda_0)\\+\sin 2[a(t)-a_0]\sin 2a_0\cos^2\lambda_0+\sin^2\lambda_0\\1/2\sin 2[a(t)-a_0]\sin 2\lambda_0\sin 2a_0\\+1/2\cos[a(t)-a_0]\sin 2\lambda_0(2\cos^2 a_0\cos 2\lambda_0-1)\\+\sin 2\lambda_0(\cos^2 a_0\cos 2\lambda_0+\sin 2\lambda_0\sin^2 a_0-1/2)\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}2a_{\lambda 0}(t)=t_{an}^{-1}\{&[\sin 2(a(t)-a_0)\cos\lambda_0(2\cos^2 a_0\cos 2\lambda_0-1)\\&+\cos 2(a(t)-a_0)\sin 2a_0\cos\lambda_0]/[\cos 2(a(t)-a_0)\\&\sin 2a_0\cos^2\lambda_0-\sin^2\lambda_0]\}\end{aligned}\qquad(4.24)$$

而 $\Delta a_{\lambda 0}(t)=[2a_{\lambda 0}(t)-2a(t)]/2$ (4.25)

图 4.10 为根据式(4.24)和(4.25)计算所得的误差曲线。

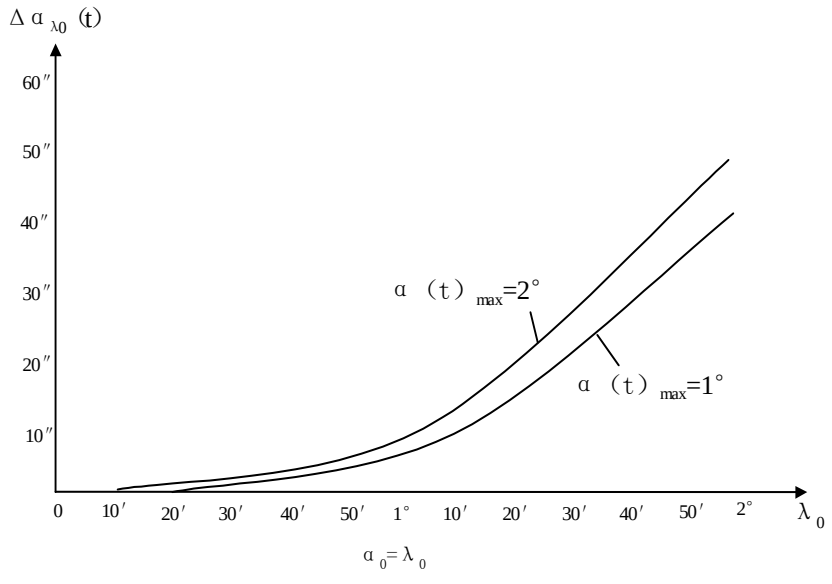


图 4.10 沿纵轴挠曲变形对自校正精度影响曲线

4.7 构件沿纵轴扭转变形耦合后引起的方位自校正误差分析

设 A_1 和 N_4、N_5 在水平面内绕轴旋转“$-a_0$”角，然后绕构件纵轴 e_2 扭转“$-\psi_0$”角。其作用矩阵分别为：

$$\begin{bmatrix}\cos a_0 & \sin a_0 & 0\\ -\sin a_0 & \cos a_0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} 和 \begin{bmatrix}\cos\psi_0 & 0 & -\sin\psi_0\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\psi_0 & 0 & \cos\psi_0\end{bmatrix},$$

α_0 和 ψ_0 分别为构件在水平面内的挠曲变形角和构件纵轴的扭转角。

变形后，各单位向量分别为：

$$A_1=\begin{bmatrix}\cos\psi_0 & 0 & -\sin\psi_0\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\psi_0 & 0 & \cos\psi_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos a_0 & \sin a_0 & 0\\ -\sin a_0 & \cos a_0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\sin a_0\cos\psi_0\\ -\cos a_0\\ -\sin a_0\sin\psi_0\end{bmatrix};$$

$$N_4=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\cos\psi_0 & 0 & -\sin\psi_0\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\psi_0 & 0 & \cos\psi_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos a_0 & \sin a_0 & 0\\ -\sin a_0 & \cos a_0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin a(t)\\ -\cos a(t)\\ -1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\sin[a(t)-a_0]\cos\psi_0+\sin\psi_0\\ -\cos[a(t)-a_0]\\ \sin[a(t)-a_0]\sin\psi_0-\cos\psi_0\end{bmatrix};$$

$$N_5=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}\cos\psi_0 & 0 & -\sin\psi_0\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\psi_0 & 0 & \cos\psi_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos a_0 & \sin a_0 & 0\\ -\sin a_0 & \cos a_0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin a(t)\\ -\cos a(t)\\ 1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \sin[a(t)-a_0]\cos\psi_0 - \sin\psi_0 \\ -\cos[a(t)-a_0] \\ \sin[a(t)-a_0]\sin\psi_0 + \cos\psi_0 \end{bmatrix};$$

$$A_1 A_1^T = \begin{bmatrix} \sin^2 a_0 \cos^2\psi_0 & \sin a_0 \cos a_0 \cos\psi_0 \sin^2 a_0 \sin\psi_0 \sin\psi_0 \\ \sin a_0 \cos a_0 \cos\psi_0 & \cos^2 a_0 & \sin^2 a_0 \cos a_0 \sin\psi_0 \\ -\sin^2 a_0 \sin\psi_0 \cos\psi_0 & \sin a_0 \cos a_0 \sin\psi_0 & \sin^2 a_0 \sin^2\psi_0 \end{bmatrix};$$

$$I - 2N_1 N_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$I - 2N_3 N_3^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$I - 2N_1 N_1^T - 2N_3 N_3^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$I - 2N_4 N_4^T - 2N_5 N_5^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2\sin^2[a(t)-a_0]\cos^2\psi_0 & 2\sin[a(t)-a_0]\cos[a(t) & -2\sin[a(t)-a_0]\cos[a(t) \\ -\sin^2\psi_0 & -a_0]\cos\psi_0 & -a_0]\sin\psi_0\cos\psi_0 \\ & & +2\sin\psi_0\cos\psi_0 \\ 2-\sin[a(t)-a_0]\cos[a(t) & -2\cos^2[a(t)-a_0] & 2\sin[a(t)-a_0]\cos[a(t) \\ -a_0] & & -a_0]\sin\psi_0 \\ -2\sin[a(t)-a_0]\sin\psi_0\cos\psi_0 & 2\sin[a(t)-a_0]\cos a(t) & -2\sin[a(t)-a_0]\sin^2\psi_0 \\ +2\sin\psi_0\cos\psi & -2\cos^2\psi_0 & -2\cos^2\psi_0 \end{bmatrix};$$

$$[(I-2N_3N_3^T)-2(I-2N_1N_1^T-2N_3N_3^T)A_1A_1^T(I-2N_1N_1^T)N_2$$

$$= \begin{bmatrix} \sin 2a_0 \cos\psi_0 \\ \cos 2a_0 \\ \sin 2a_0 \sin\psi_0 \end{bmatrix},$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} \sin 2[a(t)-a_0]\cos\psi_0 \cos 2a_0 + \{1-2\sin^2[a(t) \\ -a_0]\cos\psi_0\}\sin 2a_0 \cos\psi_0 - 2\sin 2[a(t) \\ -a_0]\sin^2\psi_0 \cos\psi_0 \sin 2\alpha_0 \\ -\cos 2a(t) \\ \sin 2[a(t)-a_0]\sin\psi_0 \cos 2a_0 - 2\sin^2[a(t) \\ -a_0]\sin\psi_0 \sin 2a_0 + \sin 2a_0 \cos\psi_0 \end{bmatrix}$$

得:

$$2a_{\psi 0}(t) = \arctan\{\sin 2[a(t)-a_0]\cos\psi_0 \cos 2a_0 + [1-2\sin^2(a(t)-a_0)\cos^2\psi_0]$$

$$\sin 2a_0 \cos\psi_0 - \sin 2[a(t)-a_0]\sin^2\psi_0 \cos\psi_0 \sin 2a_0\}/\cos 2a(t) \quad (4.26)$$

而 $\Delta a_{\psi 0}(t) = 1/2[2a_{\psi 0}(t) - 2a(t)]$ (4.27)

图 4.11 为根据式(4.26)和(4.27)计算所得的误差曲线。

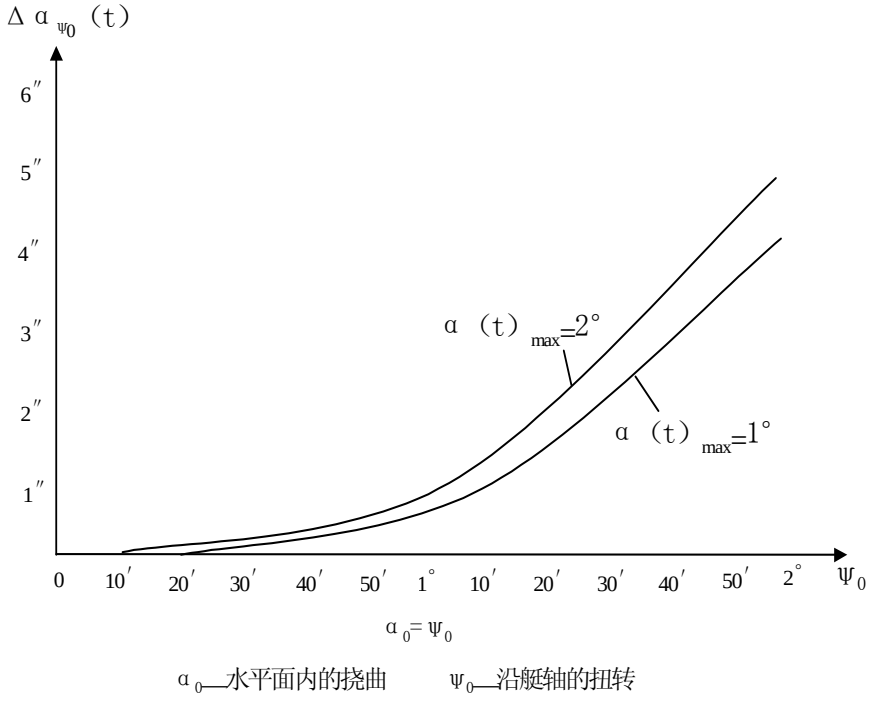


图 4.11 绕纵轴扭转对自校正精度的影响曲线

从计算得到的误差曲线看，构件沿纵轴的扭转变形，在很大范围内，造成的原理误差都是微不足道的。而构件沿纵轴的挠曲变形造成的误差，总的来说也是允许的。并可以通

过误差曲线，根据精度要求，合理地选择测量范围和允许的变形量，以及校正仪的安装误差。

4.8 航天相机像移速度的分析

航天相机像移补偿机构及其控制器，构成像移补偿执行系统，用于补偿航天相机拍照时地物产生的像移，提高动态照像分辨力。像移速度计算和像移补偿技术，是长焦距相机的关键技术之一。本节将介绍星下点摄影时像面位置方程和像移速度公式的推导。

4.8.1 坐标变换

航天相机星下点摄影时的几何关系如图 4.12 所示，在某时刻相机处于轨道坐标系 B 的原点 B_0 处，其星下点 G_0 为地理坐标系 G 的原点。

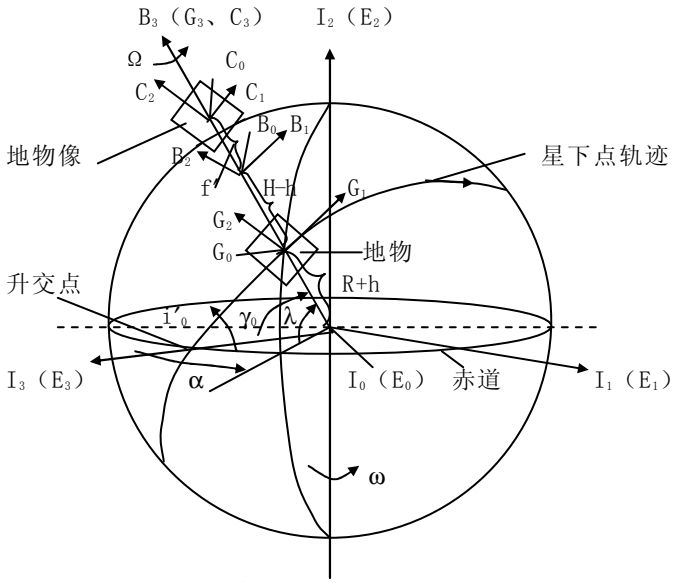


图 4.12 航天相机星下点摄影时几何关系图

坐标变换中各坐标系定义如下(全部采用右手系)

1)地心惯性坐标系 I(I_1,I_2,I_3)

原点在地心处，I_2轴指向北极，I_3轴为飞船的轨道平面和赤道面的交点，I_1轴垂直 I_2和 I_3两轴形成的平面，该坐标系保持惯性空间。

2)地球坐标系 E(E_1,E_2,E_3)

该坐标系固联于地球,原点与 I 系原点重合,E_2指向北极,与 I_2轴重合，地球坐标系在 I 系内绕 E_2(即 I_2)，逆时针方向以角速度ω自转。

3)飞船轨道坐标系 B(B_1,B_2,B_3)

原点在轨道上，B_1轴指向轨道前向，B_3轴指向天顶(并过 I 系的原点)，B_1和 B_3在轨道面内，B_2与轨道面垂直。B 系在 I 系内，沿轨道以角速度Ω作轨道运动。

4)地理坐标系 G(G_1,G_2,G_3)

从 B 坐标系沿 B_3轴(G_3轴)平移“-(H-h)”(飞船到船下点的真高度)，即得到 G 坐标系。G_1、G_2即景物偏离船下点前向和横向距离。

5)飞船坐标系 S(S_1,S_2,S_3)

该坐标系原点与 B 系原点重合，飞船无姿态运动时，S 系和 B 系重合，飞船的三轴姿态φ、θ、ψ即指 S 系在 B 系内的三轴姿态。

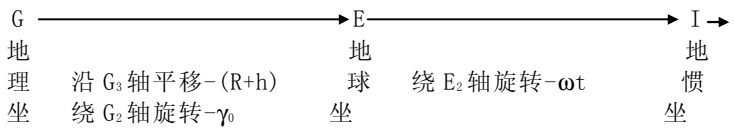
6)相机坐标系 C(C_1,C_2,C_3)

相机物镜的主点为该坐标系的原点，当相机在飞船内无安装误差或很小可忽略不计时，相机坐标系与飞船坐标系重合，而比例尺缩小(f/H-h)。

7)像面坐标系 P(P_1,P_2,P_3)

该坐标系的原点在相面的中心，C 系沿 C_3轴平移 f(相机物镜的焦距)即得到 P 系，P_1和 P_2组成像面。

从地物在地理坐标系中的位置到像面坐标系中的像，可以通过如图 4.13 所示的变换过程建立起相应的关系。所用符号的定义、各参数及其允许误差见 P30 和 31 2.6.5 蒙特卡洛法合成一节。



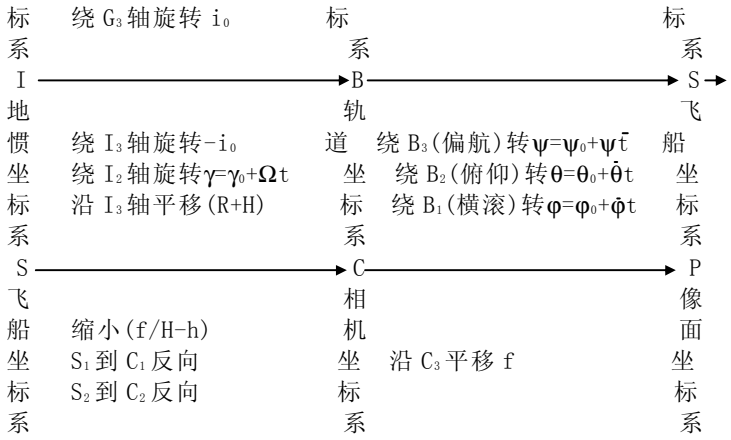


图 4.13 坐标变换过程图

4.8.2 像面位置方程

从图 4.13 变换过程可以得到从地理坐标系到像面坐标系的变换方程：

$$
P=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-f/H-h & 0 & 0 & 0\\ 0 & -f/H-h & 0 & 0\\ 0 & 0 & f/H-h & -f\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0 & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -(R+H)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}\cos\gamma & 0 & -\sin\gamma & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos i_0 & -\sin i_0 & 0 & 0\\ \sin i_0 & \cos i_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\omega t & 0 & \sin\omega t & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\omega t & 0 & \cos\omega t & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}\cos i_0 & \sin i_0 & 0 & 0\\ -\sin i_0 & \cos i_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\gamma_0 & 0 & \sin\gamma_0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\gamma_0 & 0 & \cos\gamma_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & (R+h)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_1\\g_2\\0\\1\end{bmatrix}
\tag{4.28}
$$

令 t=0，则可以得到像面位置方程（即地物位置和像面位置之间的对应关系）

$$P_{t=0}=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\\1\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}-f/H-h & 0 & 0 & 0\\ 0 & -f/H-h & 0 & 0\\ 0 & 0 & f/H-h & -f\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 & 0\\ 0 & -\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_0 & 0 & -\sin\theta_0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\theta_0 & 0 & \cos\theta_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\psi_0 & \sin\psi_0 & 0 & 0\\ -\sin\psi_0 & \cos\psi_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -(R+H)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & (R+h)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_1\\g_2\\0\\1\end{bmatrix} \qquad (4.29)$$

即(为了书写方便，以下 sin 简记 S，cos 简记 C)：

$$P_{t=0}=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\\1\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}-(\frac{f}{H-h})C\theta_0C\psi_0 & -(\frac{f}{H-h})C\theta_0S\psi_0 & (\frac{f}{H-h})S\theta_0 & -fS\theta_0\\ (\frac{f}{H-h})(C\varphi_0S\psi_0-S\varphi_0S\theta_0C\psi_0) & -(\frac{f}{H-h})(C\varphi_0C\psi_0+S\varphi_0S\theta_0S\psi_0) & -(\frac{f}{H-h})S\varphi_0C\theta_0 & fS\varphi_0C\theta_0\\ (\frac{f}{H-h})(S\varphi_0S\psi_0+C\varphi_0S\theta_0C\psi_0) & -(\frac{f}{H-h})(S\varphi_0C\psi_0-C\varphi_0S\theta_0S\psi_0) & (\frac{f}{H-h})C\varphi_0C\theta_0 & -fC\varphi_0C\theta_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_1\\g_2\\0\\1\end{bmatrix} \qquad (4.30)$$

展开后有：

$$\left.\begin{aligned}P_1&=-(\frac{f}{H-h})C\theta_0C\psi_0g_1-(\frac{f}{H-h})C\theta_0S\psi_0g_2-fS\theta_0\\ P_2&=(\frac{f}{H-h})(C\varphi_0S\psi_0-S\varphi_0S\theta_0C\psi_0)g_1-(\frac{f}{H-h})(C\varphi_0C\psi_0+S\varphi_0S\theta_0C\psi_0)g_2+fS\varphi_0C\theta_0\end{aligned}\right\} \qquad (4.31)$$

已知像面坐标系中一点的 P_1、P_2 值后，可通过下述方程求出对应的地理坐标系中地物点的位置：

$$\left.g_1=\frac{(H-h)}{f}(\frac{P_2-fS\varphi_0C\theta_0}{C\varphi_0C\psi_0+S\varphi_0S\theta_0S\psi_0}-\frac{P_1+fS\theta_0}{C\theta_0S\psi_0})/(\frac{C\psi_0}{S\psi_0}-\frac{S\varphi_0S\theta_0C\psi_0-C\varphi_0S\psi_0}{C\varphi_0C\psi_0+S\varphi_0S\theta_0S\psi_0})\right\}$$

$$g_2=\frac{(H-h)}{f}\left(\frac{P_2-fS\varphi_0C\theta_0}{S\varphi_0S\theta_0C\psi_0-C\varphi_0S\psi_0}-\frac{P_1+fS\theta_0}{C\theta_0C\psi_0}\right)/\left(\frac{S\psi_0}{C\psi_0}-\frac{C\varphi_0C\psi_0+S\varphi_0S\theta_0S\psi_0}{S\varphi_0S\theta_0C\psi_0-C\varphi_0S\psi_0}\right)$$

(4.32a)

由于φ_0和θ_0为小量，忽略高阶小量项 $S\varphi_0\cdot S\theta_0$ 后，并令 $P_1=P_2=0$，则可得像面中心点对应的地物点的位置的简化公式：

$$\left.\begin{aligned}g_1&=(H-h)\left(\frac{-S\varphi_0C\theta_0}{C\varphi_0C\psi_0}-\frac{S\theta_0}{C\theta_0S\psi_0}\right)/\left(\frac{C\psi_0}{S\psi_0}+\frac{S\psi_0}{C\psi_0}\right)\\ g_2&=(H-h)\left(\frac{S\varphi_0C\theta_0}{C\varphi_0S\psi_0}-\frac{S\theta_0}{C\theta_0C\psi_0}\right)/\left(\frac{S\psi_0}{C\psi_0}+\frac{C\psi_0}{S\psi_0}\right)\end{aligned}\right\}\quad(4.32b)$$

4.8.3 像移速度方程及像移速度求解

将方程(4.28)两边对时间(t)微分后，求出 t=0 的值，即可得到相面上各点的像移方程：

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix}dP_1/dt\\dP_2/dt\\dP_3/dt\\0\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}V_{P1}\\V_{P2}\\V_{P3}\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}V_{P1}=dP_1/dt\Big|_{t=0}&=\frac{f}{H-h}[\Omega(R+h)-\omega(R+h)Ci_0-g_2\omega Si_0S\gamma_0]\\&C\theta_0C\psi_0-\frac{f}{H-h}[\omega(R+h)Si_0C\gamma_0-g_1\omega Si_0S\gamma_0]C\theta_0S\psi_0\\&-\frac{f}{H-h}[g_1\Omega-g_1\omega Ci_0-g_2\omega Si_0C\gamma_0]S\theta_0\\&+\frac{g_1f}{H-h}(\dot\theta S\theta_0C\psi_0+\dot\psi C\theta_0S\psi_0)\\&+\frac{g_2f}{H-h}(\dot\theta S\theta_0S\psi_0-\dot\psi C\theta_0C\psi_0)+f\dot\theta C\theta_0\end{aligned}\quad(4.33)$$

$$\begin{aligned}V_{P2}=dP_2/dt\Big|_{t=0}&=\frac{f}{H-h}[\Omega(R+h)-\omega(R+h)Ci_0-g_2\omega Si_0S\gamma_0]\\&(-C\varphi_0S\psi_0+S\varphi_0S\theta_0C\psi_0)-\frac{f}{H-h}[\omega(R+h)Si_0C\gamma_0\\&-g_1\omega Si_0S\gamma_0](C\varphi_0C\psi_0+S\varphi_0S\theta_0S\psi_0)-\frac{f}{H-h}(g_1\Omega\\&-g_1\omega Ci_0-g_2\omega Si_0C\gamma_0)C\varphi_0C\theta_0-\frac{g_1f}{H-h}[\dot\varphi(S\varphi_0S\psi_0\end{aligned}$$

$$+C\varphi_0 S\theta_0 C\psi_0)+\dot{\theta}S\varphi_0 C\theta_0 C\psi_0-\dot{\psi}(C\varphi_0 C\psi_0+S\varphi_0 S\theta_0 S\psi_0)]$$
$$+\frac{g_2 f}{H-h}[\dot{\varphi}(S\varphi_0 C\psi_0-C\varphi_0 S\theta_0 S\psi_0)-\dot{\theta}S\varphi_0 C\theta_0 S\psi_0$$
$$+\dot{\psi}(C\varphi_0 S\psi_0-S\varphi_0 S\theta_0 C\psi_0)]+f(\dot{\varphi}C\varphi_0 C\theta_0-\dot{\theta}S\varphi_0 S\psi_0) \quad (4.34a)$$

由于φ_0和θ_0为小量，忽略高价小量项$S\varphi_0\cdot S\theta_0$后，方程(4.34a)可简化为：

$$V_{P2}=dP_1/dt\Big|_{t=0}=\frac{-f}{H-h}[\Omega(R+h)-\omega(R+h)Ci_0-g_2\omega Si_0 S\gamma_0]$$
$$C\varphi_0 S\psi_0-\frac{f}{H-h}[\omega(R+h)Si_0 C\gamma_0-g_1\omega Si_0 S\gamma_0]$$
$$C\varphi_0 C\psi_0-\frac{f}{H-h}(g_1\Omega-g_1\omega Ci_0-g_2\omega Si_0 C\gamma_0)C\varphi_0 C\theta_0$$
$$-\frac{g_1 f}{H-h}[\dot{\varphi}(S\varphi_0 S\psi_0+C\varphi_0 S\theta_0 C\psi_0)+\dot{\theta}S\varphi_0 C\theta_0 C\psi_0$$
$$-\dot{\psi}C\varphi_0 C\psi_0]+\frac{g_2 f}{H-h}[\dot{\varphi}(S\varphi_0 C\psi_0-C\varphi_0 S\theta_0 S\psi_0)$$
$$-\dot{\theta}S\varphi_0 C\theta_0 S\psi_0+\dot{\psi}C\varphi_0 S\psi_0]+f\dot{\varphi}C\varphi_0 C\theta_0 \quad (4.34b)$$

最终得到像移速度主向量值和偏流角如下：

$$V_P=\sqrt{V_{P1}^2+V_{P2}^2} \quad (4.35)$$
$$\beta_P=\arctan(V_{P2}/V_{P1}) \quad (4.36)$$

以上仅推导了航天相机星下点摄影时的像面位置方程和像移速度方程，如果航天相机侧摆或前摆，以及侧摆和前后摆组合后摄影时，其像面位置方程和像移速度方程将更为复杂，这里不再推导。为了提高相机的时间分辨力，必须规划相机侧摆之后的摄影。星下点摄影只是光轴侧摆和前后摆情况下的一个特例。

目　　次

§1　概 述 1
1.1　课程的目的与要求 4
1.2　仪器在机械过程中的位置 4
1.3　仪器的分类 4
1.4　本课程主要内容 5
1.5　一般仪器的基本组成 6
1.6　设计指导思想 6
1.7　设计原则 7
1.8　设计程序 7
§2　误差和误差分析方法 9
2.1　误差的概念 9
2.1.1　误差与不确定度 9
2.1.2　误差的分类 9
2.1.3　误差源 9
2.1.4　误差分析的目的 10
2.2　测量稳定度与测量结果的精密度 10
2.2.1　算术平均值的无偏性(以下讨论都是 n 次有限测量) .. 11
2.2.2　算术平均值的方差 11
2.2.3　方差估计—贝塞尔(Bessel)公式 11
2.2.4　标准偏差估计值的标准偏差 12
2.3　随机变量 12
2.3.1　随机变量的数字特征 12
2.3.2　常用随机变量的概率密度函数 12
2.4　仪器的随机不确定度的估计(置信水平) 17
2.4.1　用 t 分布来估计随机不确定度 17
2.4.2　X^2 分布应用于 σ^2 的区间估计 20
2.4.3　F 分布用于判断两组测量方差的相等性 22
2.5　仪器误差的分析方法 24
2.5.1　微分法(误差的独立作用原理) 24

2.5.2 几何法 25
2.5.3 逐步投影法(光电跟踪系统三轴误差分析)..... 25
2.5.4 作用线与瞬时臂法(详查相机像移补偿残差分析)..... 25
2.6 仪器误差的综合 26
2.6.1 方差合成原理合成随机误差..... 26
2.6.2 直接卷积合成(数值计算)随机误差..... 26
2.6.3 系统误差的合成 31
2.6.4 不同性质误差的合成 31
2.6.5 蒙特卡洛法合成 32
2.6.6 信号流动图法合成 37
§3 传递函数 46
3.1 用传递函数表示的线性系统随机信号的输入响应..... 46
3.2 控制系统的主要环节的传递函数..... 48
3.3 一个自由度机械系统的传递函数..... 50
3.4 光学系统传递函数 51
3.4.1 从物理概念上进行讨论 52
3.4.2 MTF 曲线的两个重要性质 54
3.5 光学传递函数的进一步认识..... 55
3.5.1 一维成像 55
3.5.2 二维成像 56
3.5.3 计算光学系统传递函数的三种方法..... 57
3.6 各种光学环节的传递函数..... 58
3.6.1 人眼的传递函数 58
3.6.2 底片的传递函数 60
3.6.3 大气调制传递函数的计算..... 61
3.6.4 振动与像移的传递函数..... 69
3.7 CCD 星载相机综合传递函数分析 71
§4 光学仪器中的坐标变换 81
4.1 用齐次坐标表示的三维图形的坐标变换..... 81
4.2 光路转折 83

4.3 平台调平误差引起的瞄准误差分析 85
4.4 折转光管位置装调误差引起的方位传递误差分析 88
4.5 瞄准中构件水平面内变形自动补偿分析 91
4.6 构件在中纵剖面内变形耦合后引起的方位自校正误差分析 95
4.7 构件沿纵轴扭转变形耦合后引起的方位自校正误差分析 101
4.8 航天相机像移速度的分析 104
4.8.1 坐标变换 104
4.8.2 像面位置方程 106
4.8.3 像移速度方程及像移速度求解 108