

第二章 近轴光学

近轴光学还有一些其他的名称，如高斯光学、一级光学、初级光学、理想光学等，名称虽然不同，但研究的内容基本相同。近轴光学，是指邻近光学系统光轴区域内的光的传递及成像特性。

我们知道，光学系统中光学仪器的核心，普通光学系统主要由透镜、反射镜、折射和反射棱镜、滤光片、分划板、孔径光阑和视场光阑等光学元件组成。如图 2.0.1 所示。

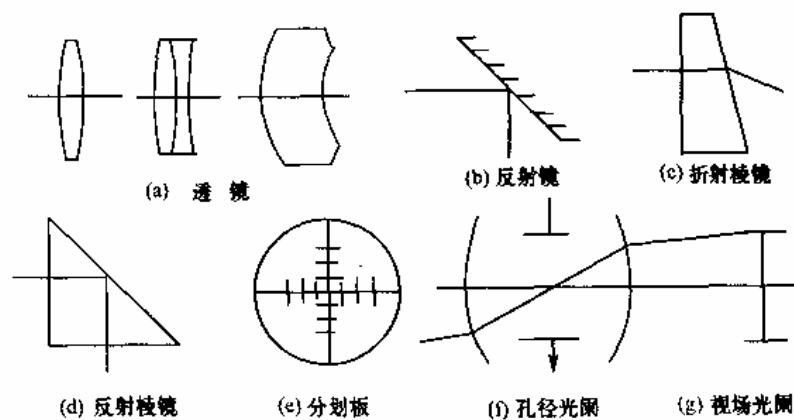


图 2.0.1 典型的光学元件

光学系统是传递和变换信息的工具，由于光学系统质量上的缺陷，在传递和变换信息的过程中，往往会丧失一部分信息，或者使信息的状态发生某些改变。我们研究与设计光学系统的目的，就是要尽量减少因光学系统本身的质量缺陷而造成的信息损失和畸变。

透镜是光学系统的基本元件，它是由曲面(平面是其曲面的特例)围成，其间的材料通常为光学玻璃，近年用塑料制成透镜日渐增多。单透镜是由两个曲率不同(也可以相同)的球面或非球面组成的。透镜的形状和结构繁多，几个或几组透镜的组合就可以构成不同应用目的的光学系统。光学设计者除了利用透镜曲率半径的变化之外，还往往利用光学玻璃的折射率和色散的差别来校正光学系统的像差，目前可利用的光学玻璃有 200 多种。在可见光范围内，

折射率 n_d 处在 1.45~1.90 之间，阿贝数 $\gamma_d = \frac{n_d - 1}{n_f - n_c}$ 处在 25~85 之间。

阿贝数是镜片设计的重要参数，也是检验中不可忽视的因素。阿贝数是表征色散的重要指标，它也称为色散系数。 n_d ：镜片对钠黄光折射率（ d 光波长：0.5876 微米）； n_f ：镜片对紫光折射率（ f 光波

长: 0.4861 微米); n_c 镜片对红光折射率 (c 光波长: 0.6563 微米)。当镜片对紫光折射率 n_f 及红光折射率 n_c 越接近时 (色散偏差小), 阿贝数越大。反之, 阿贝数越小。为满足各种不同需求, 镜片取用不同的材质, 其折射率不同, 阿贝数亦不同。

透镜的种类和玻璃的可选择性为光学设计者设计高质量的光学系统创造了机会。但这还不够, 这仅仅是给光学仪器设计提供了“素材”, 更重要的是需要光学设计理论的指导和经验的积累, 一个既具有理论知识又有丰富经验的光学设计者, 在计算机发展的今天, 可以在几小时甚至几分钟内就设计出一个高质量的镜头。因为他知道, 对于具体的应用目的, 什么样的结构最适合, 哪几种玻璃匹配适合于校正像差, 对于具体的物像关系, 透镜哪种弯曲形式最好等等。因此, 无论是在计算机还没出现的时代, 还是计算机飞速发展的今天, 掌握光学系统设计理论和在实际工作中积累经验都是非常重要的。

由于计算机的发展, 光学计算的工作已由计算机来完成了。光学设计者们已经从繁重的追迹光线的工作中解脱出来, 并且出现了各种各样的光学设计程序, 有的程序的自动化程度还很高。但是, 如果没有具有必要的理论知识和经验积累, 是很难设计出符合事实技术需求好镜头的。因此, 学习掌握光学仪器的有关理论和在实践中积累经验对于光学设计是非常重要的, 我们就从近轴光学的内容开始进行光学优化计算这一充满趣味的领域。

几何光学实际上最难掌握的是将要使用的标记和符号规则。光学设计中的符号, 有些也许会与普通物理学中的符号规则不同, 但我们尽量合用易学易记, 并为大多数光学设计师所使用的标记和符号规则。从现在开始, 我们将会逐步涉及到这些标记与符号规则。

2.1 子午面内的光线计算

构成透镜的球面或非球面的球心的连线叫做光轴。构成光学系统的各个透镜, 如果球心均在一条公共直线上, 或者说, 各个透镜的光轴重合, 那么这类光学系统叫做**共轴光学系统**。否则为**非共轴光学系统**。大部光学系统是共轴的。

与光学系统的光轴共面的光线叫做**子午光线**, 子午光线与光轴所形成的面叫做**子午面**。子午光线的二维特性光线追迹变得容易处理, 光线追迹公式也比较简单。对于大多数光学系统, 只要追迹若干条子午光线所获得的信息就可基本上满足质量评价和结构尺寸确定的要求。因此说, 子午光线的追迹是十分重要的。

2.1.1 光线在单个表面上的折射

当光线通过光学系统时，可用折射定律和反射定律来追迹它们。如图 2.1.1 表示一条入射到单个球表面上的光线情况。设该表面的曲率半径为 R ，曲率中心为 C 。该光线与球面的交点为 Q ，如果不发生折射，它将继续沿原方向传播并交光轴于 P 点。由于表面左边和右边介质的折射率不同($n \neq n'$)，光线在 Q 处发生了折射，使光线改变了方向，交光轴于 P' 点。

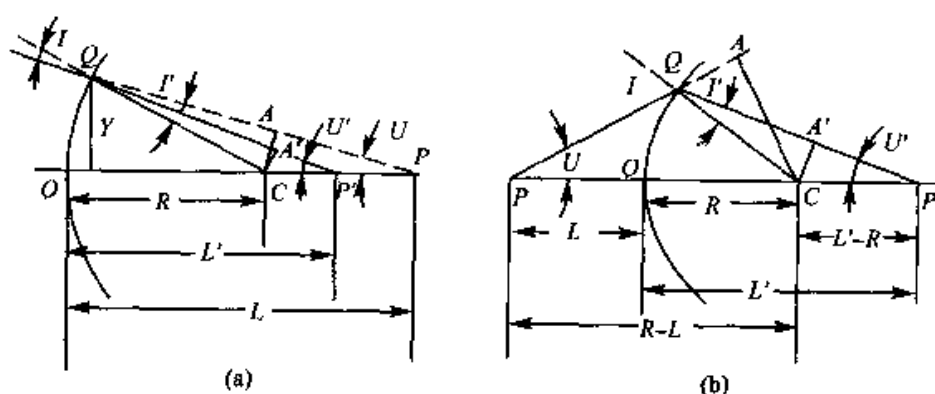


图 2.1.1 光线在单个表面上的折射

在子午面内，有关参数定义如下：

物距 L ： P 点与表面顶点 O （透镜表面与光轴的交点）的距离；

像距 L' ： P' 点与表面顶点 O 的距离；

物方孔径角 U ： 光线在折射前与光轴的夹角， $\angle QPO$ 。

像方孔径角 U' ： 折射后与光轴的夹角， $\angle QP'O$ 。

入射角 I ： 光线折射前(入射光线)与表面法线的夹角。

出射角 I' ： 折射光线与表面法线的夹角。

对以上各量，符号规定如下：

- 1) 光线自左向右传播为正方向，反之为负方向。
- 2) 表面曲率半径在该表面顶点之右边，其半径 R 为正，反之为负。
- 3) 以顶点为坐标原点，在右边的值为正，在左边的值为负。
- 4) 对入射角 I 和折射角 I' ，如果光线顺时针旋转到达法线，则 I 或 I' 为正，反之为负。
- 5) 对于孔径角 U 和 U' (也叫倾斜角)，如果光线反时针旋转到达光轴，则正值，顺时针

旋转到达光轴，则为负值。

6) 如果 Q 点在光轴之上方，则 Q 点与光轴之距 Y 为正值， Q 点在下方时， Y 为负值。

这里，符号及符号规则是约定俗成、人为规定的，不过，现在也有国家标准(GB1224-1976)的规定，理论上，国家是必须严格遵守的。因为只有这样，才能使在某种情况下推导的公式具有普遍性，也只有遵守这些符号规则，才能在工程实际中与同行时行交流。图中各量均为几何量，计算时，要注意其正负号。

由上规定，图 2.1.1 (a) 中的所有量均正。图 2.1.1 (b)中，孔径角 U 和物距为 L 为负值，其余全为正值。

下面给出光线经过该表面的计算公式。

1) 求曲率中心 C 点到入射光线的垂直距离 CA 。由直角三角形 PAC ，得：

$$CA = (L - R)\sin U = R \sin I \quad (2.1.1)$$

2) 求 $\sin I$ 。由直角三角形 QAC ，得：

$$\sin I = \frac{CA}{R} = \frac{L - R}{R} \sin U \quad (2.1.2)$$

3) 求 $\sin I'$ 。由折射定律：

$$\sin I' = \frac{n}{n'} \sin I \quad (2.1.3)$$

4) 求 U' 。由三角形内、外角关系，可得：

$$\angle QCO = U + I = U' + I'$$

由此得到：

$$U' = U + I - I' \quad (2.1.4)$$

又

$$\sin I' = \frac{CA'}{R} \quad (2.1.5)$$

所以，

$$CA' = (L' - R)\sin U'$$

式中， CA' 为曲率中心 C 点到出射光线的垂直距离。把式 (2.1.2) 和 (2.1.5) 代入 (2.1.3)，得：

$$CA' = \frac{n}{n'} CA = R \sin I' \quad (2.1.6)$$

5) 求 L'

$$L' = R + \frac{CA'}{\sin U'} = R + R \frac{\sin I'}{\sin U'} = R + R \frac{n \sin I}{n' \sin I'} = R + \frac{n(L - R) \sin U}{n' \sin U'} \quad (2.1.7)$$

用上面这些公式就可以进行折射光线的计算。计算时，除了要给出光学系统的结构参数外，还要给出物距 L 和物方孔径角 U 。

当 $L \rightarrow \pm\infty$ 时，给出入射光线高度 Y 。这时有：

$$CA = Y \quad (2.1.8)$$

$$\sin I = \frac{CA}{R} = \frac{Y}{R} \quad (2.1.9)$$

$$\sin I' = \frac{n}{n'} \sin I \quad (2.1.10)$$

$$U' - U = I - I' \quad (2.1.11)$$

$$L' = R \left(1 + \frac{\sin I'}{\sin U'} \right) = R + \frac{nY}{n' \sin U'} \quad (2.1.12)$$

由此可见，只要给出光学系统的结构参数(如曲率半径、透镜厚度、空气间隔、折射率、通口径等)和初始值(U ， L 或 Y 等)，就可以计算出像距 L' 和像方孔径角 U' 等光学和光线参数。

2.1.2 子午线内若干表面的光线追迹

前面讲述了经过单个折射表面的子午光线追迹，实际上，光学系统是若干个透镜组成的，每个透镜至少由两个表面构成。我们现在来讨论经过整个光学系统的光线追迹。光线追迹的内容很多：其中包括子午面内的光线追迹、孤矢光线追迹、空间光线追迹、轴外细光线追迹、近轴光线追迹。我们这里先考虑子午光线追迹。

光线追迹计算通常由下面四个步骤构成。

- 1) 系统结构和初始数据；
- 2) 折射或反射计算；
- 3) 转面(或传递)计算；
- 4) 终结及几何像差计算。

对于一个光学系统，在进行光线追迹计算时，要事先给出**结构参数**，这些参数主要包括透镜的曲率半径、透镜厚度、透镜之间的间隔、透镜材料的折射率和色散等。

图 2.1.2 是由三片透镜组成的光学系统，它的结构参数包括：6 个曲率半径，3 个透镜厚度，2 个空气间隔，构成透镜的 3 种光学玻璃。

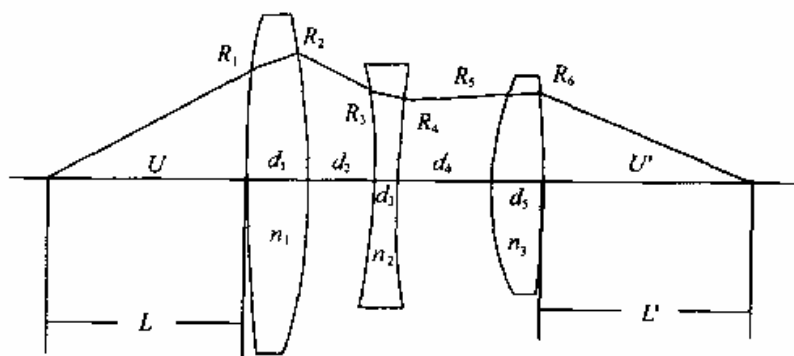


图 2.1.2 光学系统结构参数和初始数

初始数据为待成像的物体的位置坐标，主要包括物距 L_1 ，物方孔径角 U_1 ；当物体处在无穷远时， $L_1 \rightarrow \pm\infty$ ， $U_1 = 0$ ，此时给出光线高度值 Y_1 。我们这里给出追迹光线的两种算法，所使用的符号的意义如图 2.1.3 所示。

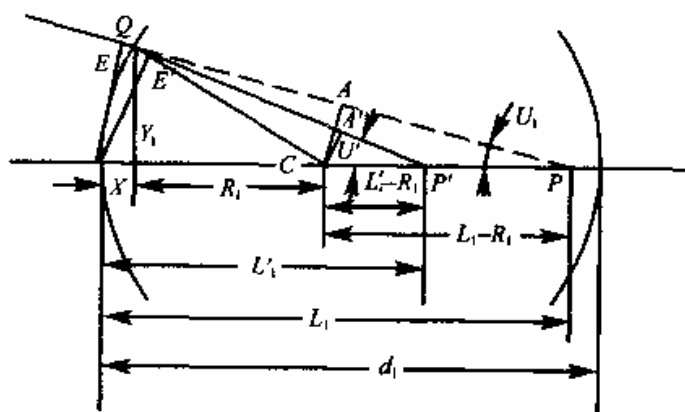


图 2.1.3 子午面内的光线计算

算法一

- 1) 初始数据：物距 L_1 。当 $L \rightarrow \pm\infty$ 时，给出入射光线高度 Y_1 。
- 2) 折射计算。由公式(2.1.2)、(2.1.3)、(2.1.4)、(2.1.7)

$$\sin I_1 = \frac{CA_1}{R_1} = \frac{L_1 - R_1}{R_1} \sin U_1 \quad (2.1.2)$$

$$\sin I_1' = \frac{n_1}{n_1'} \sin I_1 \quad (2.1.3)$$

$$U'_1 = U_1 + I_1 - I'_1 \quad (2.1.4)$$

$$L'_1 = R_1 \left(1 + \frac{\sin I'_1}{\sin U'_1} \right) = R_1 \left(1 + \frac{n_1 \sin I_1}{n'_1 \sin I'_1} \right) = R_1 + \frac{n_1 (L_1 - R_1) \sin U_1}{n'_1 \sin U'_1} \quad (2.1.7)$$

3) 转面公式

$$U_2 = U'_1 \quad (2.1.13)$$

$$L_2 = L'_1 - d_1 \quad (2.1.14)$$

对一个面追迹光线，如此进行下去。

4) 结束公式

$$L'_k = R_k \left(1 + \frac{\sin I'_k}{\sin U'_k} \right) = R_k \left(1 + \frac{n_k \sin I_k}{n'_k \sin I'_k} \right) = R_k + \frac{n_k (L_k - R_k) \sin U_k}{n'_k \sin U'_k}$$

$$U'_k = U_k + I_k - I'_k$$

算法二

1) 初始数据

物距 L_1 ，孔径角 U_1 ， $E_1 = L_1 \sin U_1$ ；当 $L \rightarrow \pm\infty$ 时， $E_1 = L_1 \sin U_1 = Y_1$ (光线高度)。

2) 折射计算

a) 求 $\sin I_1$

$$\frac{L_1 - R_1}{\sin I_1} = \frac{R_1}{\sin U_1}$$

$$\sin I_1 = \frac{L_1 - R_1}{R_1} \sin U_1 = \frac{L_1 \sin U_1}{R_1} - \sin U_1 = \frac{E_1}{R_1} - \sin U_1 \quad (2.1.15)$$

$$E_1 = R_1 (\sin U_1 + \sin I_1) \quad (2.1.16)$$

式中， E_1 为表面顶点到入射光线的垂直距离。

b) 求 $\sin I'_1$

$$\sin I'_1 = \frac{n_1 \sin I_1}{n'_1} \quad (2.1.2)$$

c) 求 U'_1

$$U_1' = U_1 + I_1 - I_1' \quad (2.1.4)$$

根据式(2.1.16)可直接得出：

$$E_1' = R_1'(\sin U_1' + \sin I_1') \quad (2.1.17)$$

式中， E_1' 为表面顶点到出射光线的垂直距离。

由式(2.1.16)和(2.1.17)，我们求出：

$$\frac{E_1'}{E_1} = \frac{\sin U_1' + \sin I_1'}{\sin U_1 + \sin I_1} = \frac{2 \sin \frac{U_1' + I_1'}{2} \cos \frac{U_1' - I_1'}{2}}{2 \sin \frac{U_1 + I_1}{2} \cos \frac{U_1 - I_1}{2}} = \frac{\cos \frac{U_1' - I_1'}{2}}{\cos \frac{U_1 - I_1}{2}} \quad (2.1.18)$$

$$U_1' + I_1' = U_1 + I_1$$

上式的分子和分母分别乘以 $\cos \frac{U_1' + I_1'}{2}$ 和 $\cos \frac{U_1 + I_1}{2}$ ，得

$$\frac{E_1'}{E_1} = \frac{\sin U_1' + \sin I_1'}{\sin U_1 + \sin I_1} = \frac{\cos U_1' + \cos I_1'}{\cos U_1 + \cos I_1} \quad (2.1.19)$$

求出：

$$L_1' = \frac{E_1'}{\sin U_1'} \quad (2.1.20)$$

3) 转面(或传递)公式：

$$U_2 = U_1'$$

$$E_2 = E_1' - d_1 \sin U_1$$

$$L_2 = L_1' - d_1$$

4) 终结公式

$$L_k' = \frac{E_k'}{\sin U_k'} \quad (2.1.21)$$

下面补充交待一下符号的意义：

E ：表面顶点到入射光线的垂直距离，在光轴之上为正，在光轴之下为负。

E' ：由表面顶点到折射光线之垂直距离，其他规定与 E 同。

X ：出光线与折射表面的交点向光轴作垂线，交了光轴上的点离开表面顶点的距离，在表面顶点的右方为正，左方为负。

$$X = \frac{E \sin U + \sin I}{\cos U + \cos I} \quad (2.1.22)$$

Y : 光线与折射表面的交点到光轴的距离, 在光轴之上为正, 在光轴之下为负。

$$Y = \frac{E'[1 + \cos(U + I)]}{\cos U' + \cos I'} \quad (2.1.23)$$

d_{12} : 两表面 1 和 2 之间沿光轴的距离。

2.1.3 光线经过平面和平行平板时的光线计算

光线经过单个平面时的情况。平面是当 $R = \infty$ 时的特殊情况, 这时的光线追迹公式可直接由球面追迹公式推导出来(见图 2.1.4)。

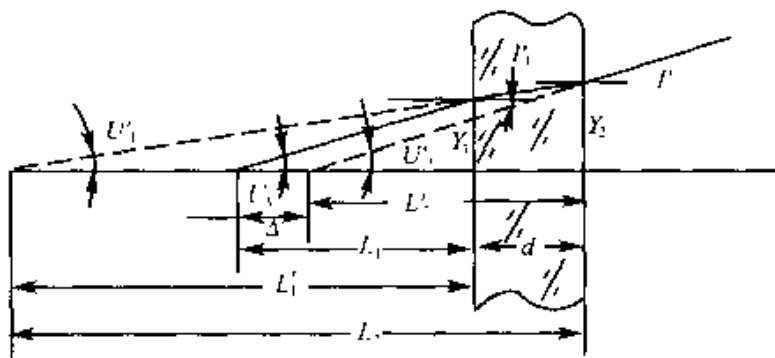


图 2.1.4 光线经过平行平板玻璃的计算

1) 初始数据

L_1, U_1 ; 当 $L_1 = -\infty$ 时, 只给出物高 Y_1 就可以了。

2) 折射计算

$$\sin I_1 = -\sin U_1 \quad (2.1.24)$$

$$\sin I_1' = \frac{n_1 \sin I_1}{n_1'} - \frac{n_1 \sin U_1}{n_1'} \quad (2.1.25)$$

$$U_1' = U_1 + I_1 - I_1' = -I_1' \quad (2.1.26)$$

$$n_1 \sin U_1 = n_1' \sin U_1' \quad (2.1.27)$$

$$Y_1 = Y_1' = L_1 \tan U_1 = L_1' \tan U_1'$$

由此得到像距为：

$$L_1' = L_1 \frac{n_1' \cos U_1'}{n_1 \cos U_1} \quad (2.1.28)$$

$$E_1' = \frac{E_1 \cos U_1'}{\cos U_1} \quad (2.1.29)$$

$$L_1' = \frac{E_1}{\tan U_1' \cos U_1} \quad (2.1.30)$$

3) 当光线经过平板时，转面公式为：

$$n_2 = n_1' \quad (2.1.31)$$

$$L_2 = L_1' - d_1$$

$$Y_2 = Y_1 - d \tan U_1'$$

$$U_2 = U_1' = -I_1' \quad (2.1.32)$$

下一个面的折射计算为：

$$\sin U_2' = \sin U_1 \quad (2.1.33)$$

$$L_2 = L_1' - d = \frac{L_1 \tan U_1}{\tan U_1'} - d \quad (2.1.34)$$

$$L_2' = L_1 - \frac{d n_1 \cos U_1}{n_1' \cos U_1'} \quad (2.1.35)$$

当平行平板处在空气中时， $n_1 = n_2' = 1, n_1' = n_2 = n$ ，此时式(2.1.35)变为：

$$L_2' = L_1 - \frac{d \cos U_1}{n_1 \cos U_1'} \quad (2.1.36)$$

由此可以得出下面的结论：

1) 光线经过平行平板后，光线的方向不变，即： $U_2' = U_1$

2) 出射光线与光轴的交点会发生位移，其位移量为：

$$\Delta = d - \frac{d \cos U_1}{n \cos U_1'} \quad (2.1.37)$$

当 U, U_1' 为小量时， $\cos U_1 \approx \cos U_1' \approx 1$ ，则有：

$$\Delta \approx \left(1 - \frac{1}{n}\right)d = \frac{n-1}{n}d \quad (2.1.38)$$

如当 $n=1.5$ 时, $\Delta \approx \frac{d}{3}$ 。

2.2 光学系统的简化

我们把一个像差校正得完好的光学系统称为理想光学系统, 这样的光学系统可以简化成一个“黑匣子”(Black Box)。它的主要特征可用若干对关键点和面来表示。这些关键点和面是:

第一焦点和焦面 (也称前焦点和前焦面), 第二焦点和焦面 (后焦点和后焦面);

第一主点和主面 (前主点和前主面), 第二主点和主面 (后主点和后主面);

第一节点和节面(前节点和前节面), 第二节点和节面 (后节点和后节面)等。

来自无限远目标的、与光轴平行的光束, 经过光学系统后会聚于光轴上一点、该点就叫做光学系统的**焦点**。通过该点作光轴的垂面, 该垂面就叫做光学系统的**焦平面**。如果平行光束来自光学系统的左边, 所形成的焦点和焦平面称为第二焦点和焦平面 (或者后焦点和后焦面), 如果平行光束来自光学系统的右边, 所形成的焦点和焦平面称为第一焦点和焦平面 (前焦点和前焦面)。在图 2.2.1 中, F' 点为第二 (后) 焦点, 面 F 点为第一 (前) 焦点。

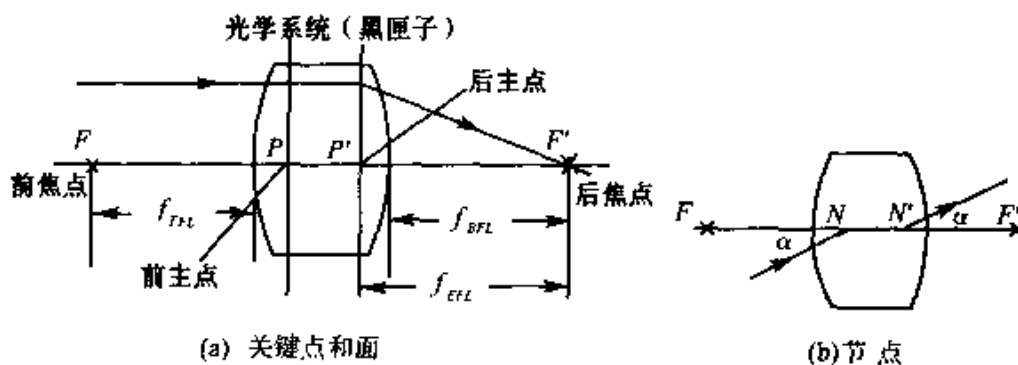


图 2.2.1 光学系统的关键点和面及节点

平行于光轴的入射光线与通过光学系统后的出射光线(或反向延长线)相交于一点、这些点的集合所构成的面叫做光学系统的主面, 该主面与光轴的交点叫做光学系统的主点。如果平行于光轴的人射光线来自光学系统的左边, 那么所形成的主点和主面称为第二主点和主面

(后主点和后主面), 如果平行于光轴的人射光线来自光学系统的右边, 那么所形成的主点和主面称为第一主点和主面(前主点和前主面)。在图 2.2.1 (a) 中 P' 点为第二 (后) 主点, 而 P 点为第一 (前) 主点。

从光学系统的第一主点到第一焦点的距离叫做光学系统的第一有效焦距。从光学系统的第二主点到第二焦点的距离叫做光学系统的第二有效焦距。在图 2.2.1 (a) 中, $P'F'$ 为第二有效焦距 (f_{EFL}), 通常用 f' 表示。而 PF 为第一有效焦距, 用 f 表示。从光学系统的最后表面的顶点到第二焦点的距离叫做光学系统的后焦距 (f_{BFL})。从光学系统的前表面的顶点到第一焦点的距离叫做光学系统的前焦距 (f_{FFL})。

光学系统的节点处于光轴上, 光线进入第一节点的方向与光线从第二节点出来的方向相同, 亦即角放大率等于 1。这是**节点**的最基本的意义。图 2.2.1 (b) 说明了节点的概念。当透镜的两边的介质相同时, 则节点和主点重合, 但当透镜的两边的介质不同时 (加油浸显微物镜), 节点和主点就不重合了。

利用光学系统的关键点和面的概念, 我们可以使复杂的光学系统简化, 亦即用其关键点和面来表示一个光学系统。比如用两条垂直于光轴的线段代表主面, 同时在光轴上按比例标上前后主点和前后焦点, 图 2.2.2 (a) 表示的就是一个正透镜。由于在两主面之间的光线总是平行于光轴, 因此有时候干脆把代表主面的两条线合在一起, 用一条两端带箭头的线段代表该光学系统, 其中两端凸向箭头者为正透镜, 两端凹向箭头者为负透镜, 图 2.2.1 (b) 表示的就是进一步简化的正透镜。经过上述简化之后。使得用作图法求解光学系统的物像关系变得十分简单。同时也大大简化了近轴光线计算。

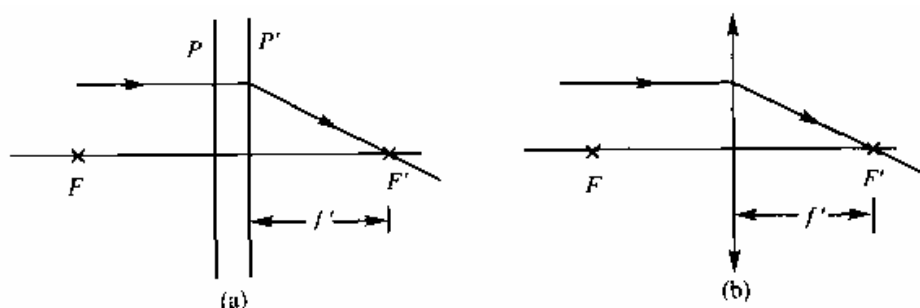


图 2.2.2 光学系统的简化

2.3 近轴区域

光学系统的近轴区域是指光轴附近很窄小的区域。该区域是如此之小，以致于在该区域内，光线所构成的**角度值本身等于相应的正弦和正切值**(如孔径角，入射角，折射角等)。乍一看来，这个概念似乎没有什么实用意义，因为按照定义所规定的近轴区域的范围实在是太小了，在这个范围内的光线所成的像，要么分辨率太低，要么进入的能量太少，难以形成清晰的像，是没有实用价值的。然而，基于近轴区域的光学系统的性质却是特别有用的。由于这种简化而使光线计算和光学系统的外形尺寸(如焦距、相对孔径、视场等)的计算变得既简单又方便。而且实际上，用近轴光学计算获得的光学系统的初步结构与实际结构常常很近似，再经过优化设计，往往会得到质量相当好的光学系统。实际的计算表明：一个高质量的光学系统会把从某一物点来的、进入系统的绝大多数光线会聚于相应的近轴像点或其附近。

近轴光线计算的关系式是上一节推导出的光线的三角计算关系式的近似，即用角度的弧度值代替正弦和正切值，其线度和角度通常用相应的小写字母来表示，即： $\sin I = i$ ， $\tan I = i$ ， $\sin U = u$ ， $\cos U = 1$ ， $L = l$ ， $R = r$ 等。

实际上，在大角度和大的高度的情况下，也常常应用近轴光线追迹方程。这听起来是矛盾的，但这种近似计算在估算光学元件的口径，粗略评价光学系统成像质量等方面是很有用的，因为计算起来方便、简洁。作为初步估价，其精度也是够用的。

虽然近轴光线计算常常作为光学系统的初步计算，但要注意的是：近轴区域是一个理想成像区域，是光学系统的极限区域。然而，实际的光学系统是存在像差的，其结构参数和尺寸在理想系统和实际系统中也是有差别的。因此，精确的光学三角光线计算还是十分必要的。这一点要牢牢记住。免得只注意近轴区域的计算，而忽略精确的光学三角光线计算。

对于近轴区域，确定其计算方程的最简便方法是用其角度值代替三角计算的正弦和正切值。

由方程(2.1.1)得到：

$$ca = (l - r)u = ri \quad (2.3.1)$$

由方程(2.1.2)得到：

$$i = \frac{ca}{r} = \frac{(l - r)u}{r} \quad (2.3.2)$$

由方程(2.1.3)得到：

$$i' = \frac{ni}{n'} = \frac{(l - r)u}{r} \quad (2.3.3)$$

由方程(2.1.4)得到:

$$u' = u + i - i' \quad (2.3.4)$$

由方程(2.1.5)得到:

$$i' = \frac{ca'}{r} \quad (2.3.5)$$

由方程(2.1.6)得到:

$$ca' = \frac{n}{n'} \times ca \quad (2.3.6)$$

由方程(2.1.7)得到:

$$l = r + \frac{ca'}{u'} = r \left(1 + \frac{ni}{n'u'} \right) = r + \frac{n(l-r)u}{n'u'} \quad (2.3.7)$$

在上述公式中, 我们在近轴区域用小写字母代替光线追迹的三角公式中的大写字母。把式 (2.3.5) 中的 ca' 代入式 (2.3.6) 中, 再把式 (2.3.1)、(2.3.2)、(2.3.3) 中的 u, u, i' 代入 (2.3.7) 中, 可以得到:

$$l' = \frac{n'lr}{(n'-n)l + nr} \quad (2.3.8)$$

方程 (2.3.8) 表示的像距只与光学系统的结构关系。把上式的分子和分母颠倒, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l'} &= \frac{n'-n}{n'r} + \frac{n}{n'l} \\ \frac{n'}{l'} &= \frac{n'-n}{r} + \frac{n}{l} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

方程 (2.3.9) 是单折射面在近轴区域内的物像关系公式, 这个公式在近轴光学计算中是经常使用的。

对于单薄透镜 ($d \approx 0$), $n_1 = n_2' = 1, n_1' = n_2 = n, l_2 = l_1' - d = l_1'$ 。

$$\frac{n}{l_1'} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{1}{l_1} \quad (2.3.10)$$

$$\frac{1}{l_2'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{l_1} \quad (2.3.11)$$

当 $l_1 \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{1}{l_2'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \varphi \quad (2.3.12)$$

实际上，公式 (2.3.12) 就是单薄透镜的光焦度表达式，式中 φ 表示光焦度。

2.4 光学系统的物像关系

我们在 2.2 中讲述了光学系统的几对关键点和面。根据这些关键点的性质，可以确定光学系统的物像关系。我们将分别用作图法和公式法来确定光学系统的物像关系。首先用作图法求出目标的像的位置和大小。图 2.4.1 是一个用关键点和面简化了的光学系统，其中， P 、 P' 为第一和第二主点， F 、 F' 为第一和第二焦点。 AB 为目标。要用作图法确定目标(AB) 通过光学系统所成的像($A'B'$) 的位置和尺寸，最常使用下面三条特征光线。它们是：

- (1) 从光轴外 B 点发出的平行于光轴的光线，经过光学系统后通过该系统的第二焦点 F' ；
- (2) 从 B 点发出的、经过系统第一焦点 F 的光线，从光学系统出来后平行于光轴；
- (3) 由 B 点发出的、交于第一节点(当系统处在空气中时，节点与主点重合)的光线，从第二节点出来后，其传播方向与原来方向相同。

上述三条光线(在实际作图时，其实用二条光线就够了)的交点就是 B 点的像点 B' ，如图 2.4.1 所示。由 B 点作光轴的垂线，交光轴于 A' 点，则 A' 点就是目标 A 点的像。

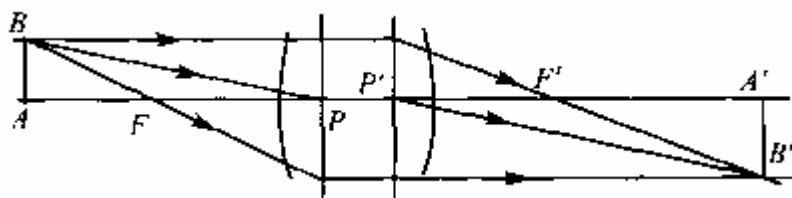


图 2.4.1 用作图法确定物像关系

如果要求出处于光轴上某一点目标的像，用作图法也可求出。其方法是由该点作光轴垂线，在垂直上找一点，点该点作两条特征光线，交于像方一点，再由该点向光轴作垂线，与光轴之交点就是该轴上点的像。图 2.4.2 画出了几种用作图法物像关系的具体例子。

关于符号的规定，我们在前面已经讲过了，这里再补充和重申一下：

- (1) 在光轴之上的物高(或像高)为正。如图 2.4.1 中的 AB ，在光轴之下为负，如 $A'B'$ 。
- (2) 有时为了计算方便，将选取不同的点作为参考点，如推导牛顿公式时，就以第一、第二焦点为参考点。推导高斯公式时、则以第一、第二主点为参考点。我们规定，位于参考点右边的量为正，左边的量为负。

(3) 使平行光束会聚的透镜的焦距为正，使平行光束发散的透镜的焦距为负。

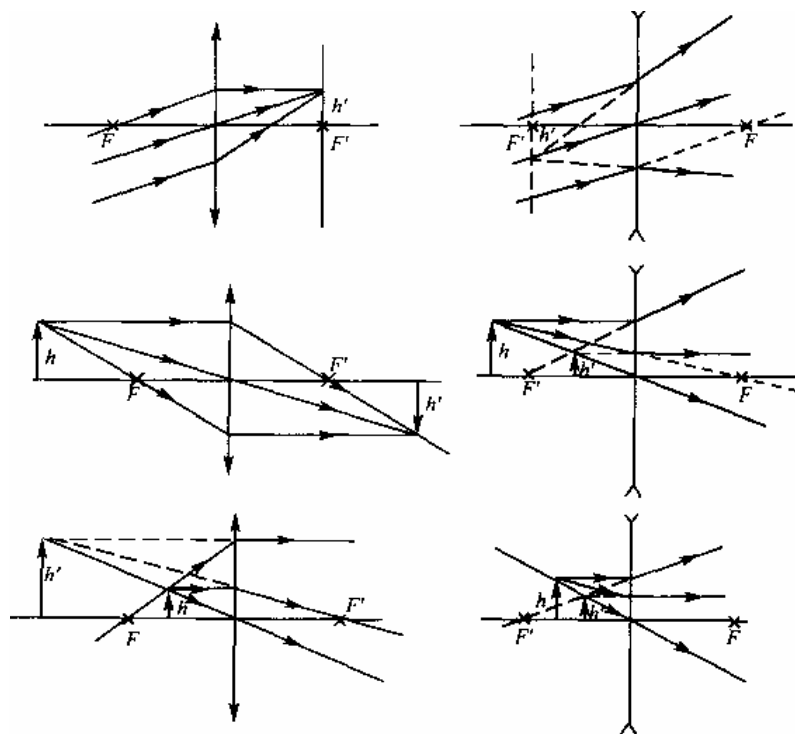


图 2.4.2 用作图法求物像关系的典型例子

1. 物像位置关系

我们现在推导物像位置关系的数学表达式。重画图 2.4.1，并标上必要的物理量，如图 2.4.3 所示。

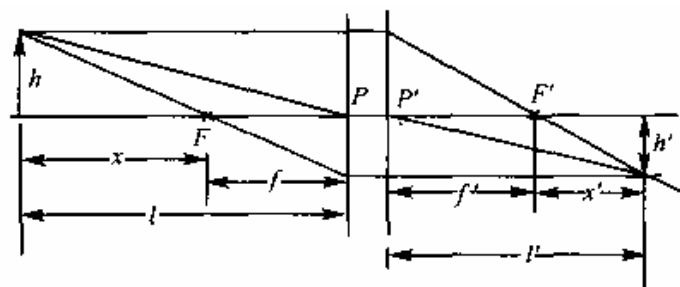


图 2.4.3 近轴光学系统的物像关系的数学表达式

在图 2.4.3 中，不带撇的量表示物方的量，带撇的量表示像方的量。 h ， h' 分别为物高和像高， x 表示以第一焦点为参考点的物距， x' 表示以第二焦点为参考点的像距， l 表示以第一

主点为参考点的物距, l' 表示以第二主点为参考点的像距。根据符号规定, h, x', l' 为正值, h', x, l 为负值。

根据相似三角形定理, 我们有:

$$\frac{h}{-h'} = \frac{-x}{f} = \frac{f'}{x'} \quad (2.4.1)$$

由此求出:

$$-xx' = ff' \quad (2.4.2)$$

当透镜两边为空气时($f = f'$)

$$-xx' = f^2 \quad (2.4.3)$$

这就是著名的牛顿公式。

由图 2.4.3, 我们得出:

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f'} \quad (2.4.4)$$

上式是著名的高斯公式。在某种意义上时, 高斯公式应该更为普遍。由高斯公式, 我们求出像距为:

$$l' = \frac{lf}{f' + l} \quad (2.4.5)$$

2. 像的大小

光学系统所成的像的大小与放大率有直接关系。光学系统的放大率有横向放大率、纵向放大率、角放大率之分。我们通常所说的放大率是指横向放大率。横向放大串的定义是: 像的高度与物的高度之比, 即:

$$m = \frac{h'}{h}$$

由式(2.4.1), 求出横向放大率为:

$$m = \frac{h'}{h} = \frac{f'}{x} = -\frac{x'}{f'} \quad (2.4.6)$$

应该(2.4.5), 可得:

$$m = \frac{l'}{l} \quad (2.4.7)$$

纵向放大率是沿光轴方向的放大率，有时也称之为轴向放大率。在图 2.4.4 中， S_1S_2 是沿光轴方向的物，而 $S'_1S'_2$ 其像。其纵向放大率为：

$$\bar{m} = \frac{\frac{l_2 f'}{l_2 + f'} - \frac{l_1 f'}{l_1 + f'}}{l_2 - l_1} = m_2 \cdot m_1 \approx m^2 \quad (2.4.8)$$

当 Δl 很小时， $m_2 \approx m_1 \approx m$ 。

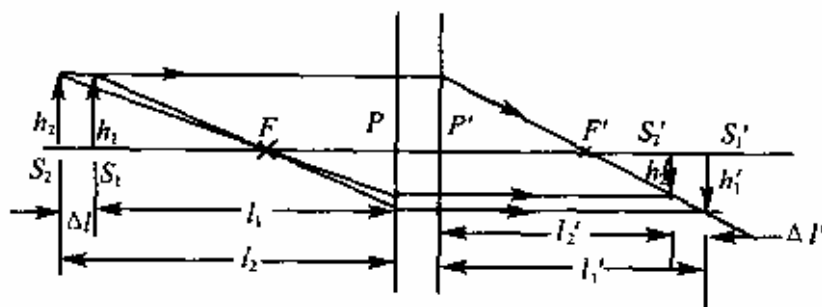


图 2.4.4 光学系统的轴向放大率

公式(2.4.8)表明：纵向放大率等于横向放大率的平方。光学系统还有一个放大率是角放大率，它是衡量望远镜系统的主要技术指标。

例 2.4.1 有一个光学系统，焦距 $f' = 200$ mm，目标高度为 50 mm，处在光学系统第一主面左边 500 mm 处。如图 2.4.5 所示。求：1) 像距 x', l' ；2) 系统的横向和纵向放大率。

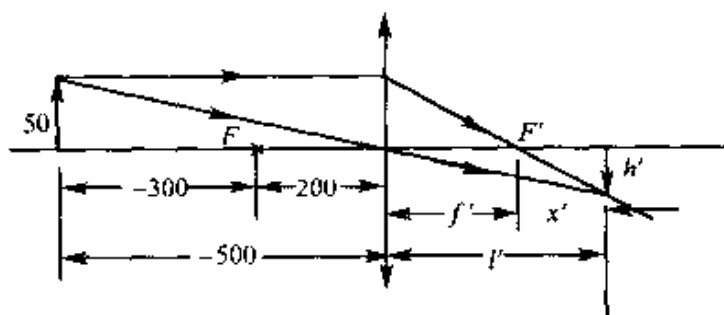


图 2.4.5 练习 2.4.1 和 2.4.2 的示意图

解：由图 2.4.5 可得：

$$l_1 = -500 \text{ mm}, x_1 = -300 \text{ mm}, h = 50 \text{ mm}$$

$$l' = \frac{lf'}{l + f'} = \frac{-500 \times 200}{-500 + 200} = 333.3\text{mm}$$

$$x' = -\frac{f'^2}{x} = -\frac{-200^2}{-300} = 133.3\text{mm}$$

$$m' = \frac{h'}{h} = \frac{l'}{l} = \frac{333.3}{-500} = -0.667\times$$

$$\bar{m} = m^2 = 0.445\times$$

$$h' = 50 \times (-0.667\times) = -33.35\text{mm}$$

例 2.4.2 在上面中，如果目标在物方焦点右边 40 mm 处，那么像在何处？放大率为多少？像高多少？

解：这时

$$l = -200 + 40 = -160\text{mm}$$

$$l' = \frac{lf}{l + f} = \frac{-160 \times 200}{-160 + 200} = -800\text{mm}$$

$$x = +40\text{mm}$$

$$x' = -\frac{f^2}{40} = -\frac{200^2}{40} = -1000\text{mm}$$

求像高 h'

$$m = \frac{l'}{l} = \frac{-800}{-160} = 5\times$$

$$h' = 50 \times 5 = 250\text{mm}$$

由上面的两个例子可以看出，对于正透镜，目标在物方焦点之外，所成的像是实的倒像，物在物方焦之内，所成的像是虚像的正像。

2.5 近轴光线追迹

当采用近轴区域内的光线追迹公式进行光线计算的时候，要比用精确的三角光线追迹公式简单和方便得多。在确定光学系统的外形尺寸以及对系统购质量进行初步分析中，常常用近轴光线来进行光线计算。尽管系统的口径超出了近轴区域所定义的范围，但这并不影响我们对整个光学系统的分析和评价。我们现在研究通过由多个透镜构成的光学系统的近轴光线追迹，给出近轴光线追迹的公式。

1. 给出初始值

a) 结构参数: r, d, n (或玻璃牌号)

b) 初始数据: l_1, u_1 ; 当 $l \rightarrow \pm\infty$ 时, y_1

2. 折射计算

由方程(2.3.12),

$$\frac{n'}{l'} = \frac{n' - n}{r} + \frac{n}{l} \quad (2.5.1)$$

在图 2.5.1 中有,

$$y_1 = l_1 u_1 = l_1' u_1'$$

代入(2.3.11)得:

$$n_1' u_1' = y_1 (n_1' - n_1) c_1 + n_1 u_1 \quad (2.5.2)$$

其中, $c_1 = \frac{1}{r_1}$ 为表面曲率。

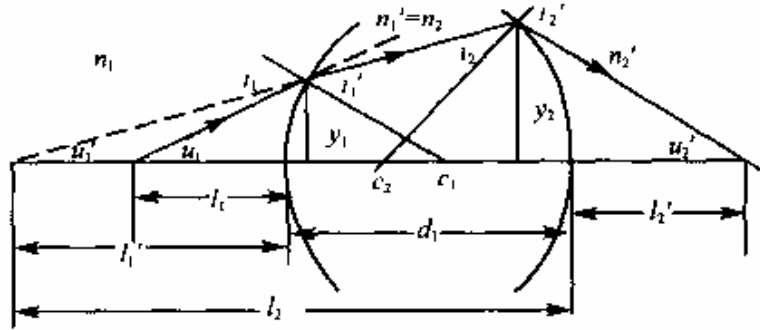


图 2.5.1 近轴光线计算

3. 转面计算

$$n_2 = n_1', u_2 = u_1'$$

$$\begin{cases} l_2 = l_1' - d_1 \\ y_2 = y_1 - d_1 u_1' \\ u_1' = y_1 - d_1 u_2 \end{cases} \quad (2.5.3)$$

由公式(2.5.2), 光线通过第一个表面后为:

$$n_1' u_1' = y_1(n_1' - n_1)c_1 + n_1 u_1$$

对于处于空中的单透镜， $n_1 = 1, n_1' = n_2 = n, n_2' = 1$ ，公式(2.1.56)变为：

$$n_1' u_1' = y_1(n-1)c_1 + u_1 \quad (2.5.4)$$

光线经过第二个表面后为：

$$u_2' = y_2(n-1)c_2 + n u_2 \quad (2.5.5)$$

根据转面公式知： $u_2 = u_1', y_2 = y_1 - u_1' d_1 = y_1 - u_2 d_1$

$$y_2 = y_1 - \frac{d_1 n_1' u_1'}{n_1'} \quad (2.5.6)$$

把上式代入(2.5.5)中，我们得出：

$$\begin{aligned} u_2' &= -y_1(n-1)c_2 + \frac{y_1(n-1)^2 c_1 c_2 d_1}{n} + \frac{(n-1)c_2 u_1 d_1}{n} + y_1(n-1)c_1 + u_1 \\ &= y_1(n-1)c_1 - y_1(n-1)c_2 + \frac{y_1(n-1)^2 c_1 c_2 d_1}{n} + \frac{(n-1)c_2 d_1 + n}{n} u_1 \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

当目标处在无限远时， $l_1 \rightarrow \pm\infty, u_1 \rightarrow 0$ ，此时式(2.5.7)变为：

$$\begin{aligned} u_2' &= -y_1(n-1)c_2 + \frac{y_1(n-1)^2 c_1 c_2 d_1}{n} \\ &= y_1(n-1)(c_1 - c_2) + \frac{y_1(n-1)^2 c_1 c_2 d_1}{n} \end{aligned}$$

把上式右边的 y_1 移至左边，得到像距的倒数，实际上就是透镜的光焦度，表达式为：

$$\varphi = \frac{1}{f'} = \frac{u_2'}{y_1} = (n-1)(c_1 - c_2) + \frac{(n-1)^2 c_1 c_2 d_1}{n} \quad (2.5.8)$$

例 2.5.1 图 2.5.1 是双胶合透镜的示意图，根据结构参数进靠近轴光线计算。然后计算主光线，以求出像的大小，横向和纵向放大倍率。

假设在本例中，双胶合透镜的孔径光阑处在第一个表面上，此时主光线在第一个面上的高度为 $y_{p1} = 0$ ， $h = y_{p0} = 20$ ， $l_{p1} = 0$ ， $h = u_{p1}(l_{p1} - l_1)$ 。

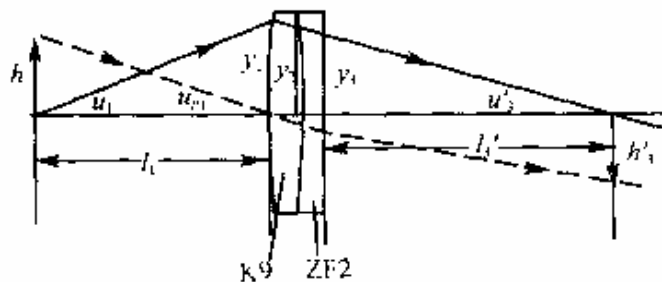


图 2.5.1 双胶合透镜的近轴光线计算

结构参数如下：

$$r_1 = 50, c_1 = 0.02$$

$$d_1 = 10 \quad 1.5163 \text{ (K9)}$$

$$r_2 = -50, c_2 = -0.02$$

$$d_1 = 2 \quad 1.6725 \text{ (K9)}$$

$$r_3 = 500, c_1 = 0.002$$

1

初始值为： $l_1 = -300 \text{ mm}$ ， $h_1 = 20 \text{ mm}$ ， $u_1 = -0.1$ (可任选)， $y_1 = 30 \text{ mm}$ 。

解： 经过第一个表面的计算：

$$\begin{aligned} n'_1 u'_1 &= y_1 (n'_1 - n_1) c_1 + n_1 u_1 = 30 \times (0.5163) \times (0.02) - 0.1 \\ &= 0.30978 - 0.1 = 0.80978 \end{aligned}$$

转面的计算：

$$n_2 = n'_1 = 1.5163$$

$$u_2 = u'_1 = \frac{0.20978}{1.5163} = 0.13835$$

$$y_2 = y_1 - u'_1 d_1 = 30 - 1.3835 = 28.6165$$

经过第二个面的折射计算：

$$\begin{aligned} n'_2 u'_2 &= y_2 (n'_2 - n_2) c_2 + n_2 u_2 = 28.6165 \times 0.1562 \times (-0.02) + 0.20978 \\ &= -0.08940 + 0.20978 = 0.12038 \end{aligned}$$

转面的计算：

$$n_3 = n'_2 = 1.672, n'_3 = 1$$

$$u_3 = u_2' = \frac{0.12038}{1.6725} = 0.07198$$

$$y_3 = y_2 - u_2' d_2 = 28.6165 - 0.1439 = 28.4726$$

经过第三个面的计算：

$$\begin{aligned} n_3' u_3' &= y_3(n_3' - n_3)c_3 + n_3 u_3 = 28.4726 \times (1 - 1.6725) \times (0.002) + 0.12038 \\ &= -0.038296 + 0.12038 = 0.08208 \end{aligned}$$

结束计算：

$$u_3' = 0.08208, y_3 = 28.4726$$

$$l_3 = \frac{28.4726}{0.08208} = 346.888$$

下面计算主光线，所谓主光线是指任何光学系统都有孔径光阑、入射光瞳、出射光瞳。物面上的点发出的光线，其中通过光瞳中心的那条光线叫做主光线。

初始数据：

$$u_{p1} = \frac{h}{l_{p1} - l_1} = \frac{20}{0 - (-300)} = 0.06667$$

经过第一个折射面时：

$$n_1' u_{p1}' = y_{p1}(n_1' - n_1)c_1 + n_1 u_{p1} = 0 + u_{p1} = 0.06667$$

$$u_{p1} = \frac{0.06667}{1.5163} = 0.04399$$

$$y_{p2} = y_{p1} - u_{p1}' d_1 = 0 - 0.04399 \times 10 = -0.4399$$

$$n_2' u_{p2}' = y_{p2}(n_2' - n_2)c_2 + n_2 u_{p2} = 0.068044$$

$$n_3 u_{p3} = n_2' u_{p2}' = 0.068044$$

$$y_{p3} = y_{p2} - u_{p3} d_2 = -0.52127$$

$$n_3' u_{p3}' = y_{p3}(n_3' - n_3)c_3 + n_3 u_{p3} = 0.067343$$

$$h_3' = u_{p3}' (l_{p3}' - l_3') = y_{p3} - l_3' u_{p3}' = y_{p3} - \frac{l_3' n_3' u_{p3}'}{n_3'} \quad (2.5.9)$$

上式与(2.5.6)式形式上是完全一样的，只是符号不同。把上面的值代入上式，就可得么像高为： $h_3' = -0.52127 - 346.888 \times 0.067343 = -23.882$ 。

2.6 厚透镜

严格地说、任何光学透镜都具有一定的厚度，这是结构上和机械强度上的需要。对于正透镜，其边缘厚度一般不应小于 3mm，对于负透镜，中心厚度一般不应小于透镜口径的 1/10~1/15，以防止安装和固定时变形。除此之外，透镜的厚度还具有很多功能、其个主要有：

1) 透镜厚度作为光学结构参数的变量，比如说，厚度的改变可以使透镜的焦距发生变化等；

2) 透镜厚度作为校正像差的变量，也就是说，通过厚度的变化来校正光学系统的像差，在双高斯型照相物镜中，就利用一块近乎对称的厚透镜来校正像差。

如果透镜的厚度仅仅用于满足结构上和机械强度上的需要，而忽略它对光学系统参数和像差的影响，那么这样的透镜叫做薄透镜。从光学设计的角度考虑，薄透镜实际上就是厚度为零的透镜。大多数透镜属于这一类型，因为把透镜看作为薄透镜，会使计算和分析大大简化。但也有些透镜，由于它的厚度不仅仅是为了满足机械结构和强度上的要求，而且还是外形尺寸和像差校正的参数。这样的透镜，称之为厚透镜。

我们首先来确定厚透镜的关键点和面。

1. 主点和主面

平行于光轴的入射光线($u_1 = 0$)和从透镜出来的出射光线的反向延长线的交点所构成的面，叫做透镜的主面，该面与光轴的交点叫做主点。从左边来的平行光线形成的主面叫做第二主面。图 2.6.1 中的 P' 点就是第二主点。我们用同样的方法，当平行光线从右向左进入光学系统时，自右至左追迹近轴光线可以得到第一主点，图 2.6.1 中的 P 点就是第一主点。

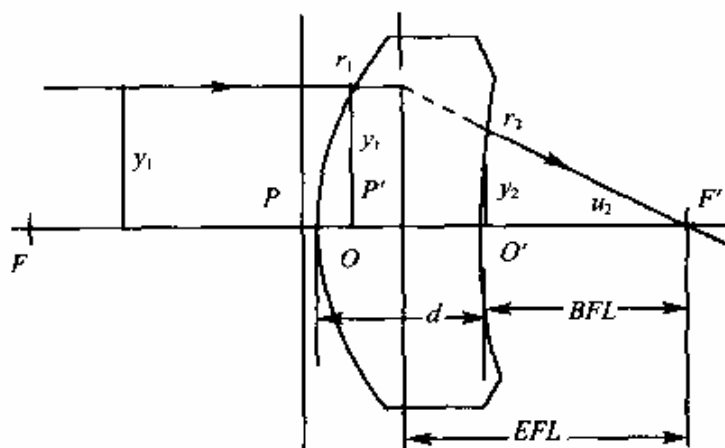


图 2.6.1 厚透镜的特征参数

2. 焦点和焦面

自左至右传播的平行于光轴的一束平行光线($u_1 = 0$)，经过透镜后的出射光线会聚交光轴于 F' 点，该点就是透镜的第二焦点。相反，自右至左传播的平行光线形成第一焦点 F 。过焦点作垂直于光轴的平面叫做焦平面。

3. 焦距

有效焦距 (Effective Focal Length, EFL): 由光学系统的第二主面到第二焦点的距离叫做第二有效焦距(EFL)，由第一主面到第一焦点的距离叫做第一有效焦。当包围透镜的介质相同时 (如空气)，第一和第二有效焦距相等，统称为有效焦距。

后焦距 (Back Focal Length, BFL): 由透镜后表面顶点到第二焦点的距离叫做后焦距。

前焦距 (Front Focal Length, FFL): 由透镜前表面顶点到第一焦点的距离叫做前焦距。

只有透镜是对称的时候，透镜的前焦距和后焦距才相等，一般情况下，透镜的前、后焦距是不相等的。

透镜(或光学系统)的有效焦距为:

$$f' = \frac{y_1}{u_k'} \quad (2.6.1)$$

透镜的后焦距为:

$$f_b' = \frac{y_k}{u_k'} \quad (2.6.2)$$

式(2.6.1)为单透镜在近轴区域的光线追迹公式，当 $u_1 = 0$ 时，式(2.6.1)变为:

$$u_2' = y_1 \left[(n-1)c_1 - y_1(n-1)c_2 + \frac{y_1(n-1)^2 c_1 c_2 d_1}{n} \right]$$
$$\varphi_e = \frac{1}{f_e'} = (n-1) \left[(c_1 - c_2) + \frac{(n-1)c_1 c_2 d}{n} \right] \quad (2.6.3)$$

$$\varphi_e = \frac{1}{f_e'} = (n-1) \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)c_1 c_2 d}{n} \right] \quad (2.6.4)$$

式中: f_e' 和 φ_e 表示有效焦距和有效光焦度。

后焦距为:

$$f_b' = \frac{y_2'}{y_2'} = f_e' - \frac{f_e' d (n-1)}{nr_1} \quad (2.6.5)$$

根据第二 (后) 主点的定义、它与透镜(或光学系统)最后表面之距恰好等于透镜(或光学系统)的有效焦距与后焦距之差, 其值为:

$$p'o' = f_e' - \left(f_e' - \frac{f_e' d (n-1)}{nr_1} \right) = \frac{f_e' d (n-1)}{nr_1} \quad (2.6.6)$$

图 2.6.2 画出了几种典型的透镜的主点和焦点的位置, 出图我们注意到: 等凸透镜和等凹透镜的主点对称地分布在透镜内。平凸和平凹透镜的一个主点处在曲面顶点上, 另一个在透镜内约三分之一处。在弯月型透镜中, 如果弯得很厉害, 那么两个主点均处在透镜之外, 而且主点顺序也可能颠倒。

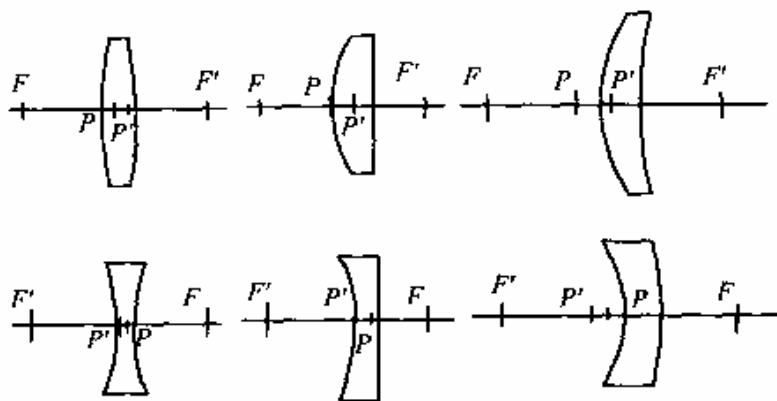


图 2.6.2 厚透镜的典型形状

负透镜的焦点位置与正透镜是相反的, 正透镜的第二 (后) 焦点在透镜右方, 而负透镜的第二 (后) 焦点在其左方。

2.7 薄透镜

在厚透镜一节中已经涉及到了薄透镜的概念, 所谓薄透镜, 就是它的厚度为零。对透镜作这样的近似处理基本上不影响计算的精度。薄透镜的概念是特别有用的。在初始计算和分析中, 绝大多数透镜都可看作为薄透镜, 这给分析和计算带来极大的方便。薄透镜的焦距可由厚透镜的焦距公式导出来, 在公式 (2.6.4) 中, 我们设 $d = 0$, 则有:

$$\varphi_e = \frac{1}{f_e'} = (n-1)(c_1 - c_2) = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.7.1)$$

我们比较一下考虑透镜厚度和个考虑透镜厚度时，焦距会有多大变化。设 $n = 1.5163(\text{K9})$ ，

$r_1 = 50 \text{ mm}$ ， $r_2 = -50 \text{ mm}$ ， $d = 6 \text{ mm}$ 。按厚透镜公式计算得到：

$$\varphi = (n-1) \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{(n-1)d}{nr_1r_2} \right] = 0.02023$$

$$f_h = 49.43 \text{ mm}$$

按薄透镜(2.7.1)计算得到：

$$\varphi = \frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 0.02605 \quad (2.7.2)$$

$$f' = 48.42 \text{ mm}$$

二者的相对误差为 2%。这个误差并不影响初始结构的分析和计算，实际上这个误差处在加工和装调允许的范围之内。

在薄透镜中，由于 $d = 0$ ，第一和第二主面重合，在薄透镜处在空气中的情况下，有效焦距和前、后焦距也就相等了。此时近轴光线计算公式可以简化。下面我们以两个分离薄透镜为例进行近轴光线追迹计算，如图 2.7.1 所示。

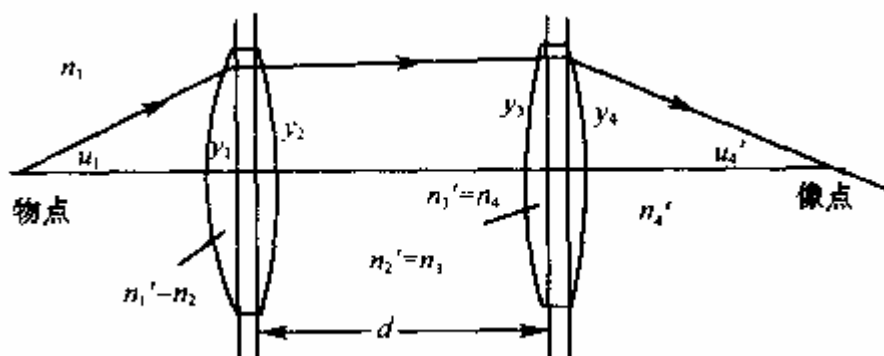


图 2.7.1 分离薄透镜的近轴光线计算

第一面： $n_1' u_1' = y_1(n_1 - 1)c_1 + u_1$

第二面： $n_2' u_2' = y_1(1 - n_1)c_2 + y_1(n_1 - 1)c_1 + u_1$

$$u_2' = y_1(n_1 - 1)(c_1 - c_2) + u_1$$

上面公式中我们利用了 $d=0, y_1=y_2$ 等薄透镜性质。

第三面: $u_3=u_2', n_3=n_2'=1$

$$y_3 = y_1 - y_1(n_1 - 1)(c_1 - c_2)d - du_2$$

$$n_3'u_3' = y_1(n_2 - 1)c_3 - y_1(n_1 - 1)(c_1 - c_2)d(n_2 - 1)c_3 - (n_2 - 1)c_3du_1 + y_1(n_1 - 1)(c_1 - c_2) + u_1$$

第四面: $y_4 = y_3 = y_1 - y_1(n_1 - 1)(c_1 - c_2)d - du_2$

$$n_4' = 1, n_4 = n_2$$

$$n_4'u_4' = y_1(n_1 - 1)(c_1 - c_2) + y_1(n_2 - 1)(c_3 - c_4) - y_1(n_1 - 1)(c_1 - c_2)(n_2 - 1)(c_3 - c_4)d - (n_2 - 1)(c_3 - c_4)du_1 + u_1$$

当目标无穷远时, $u_1 = 0$, 则上式变为:

$$u_4' = y_1[(n_1 - 1)(c_1 - c_2) + (n_2 - 1)(c_3 - c_4) - (n_1 - 1)(c_1 - c_2)(n_2 - 1)(c_3 - c_4)d]$$

$$\varphi = \frac{1}{f'} = \frac{f_1' + f_2' - d}{f_1' f_2'} \quad (2.7.2)$$

$$f' = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - d} \quad (2.7.3)$$

上式中的 d 是两个薄透镜之间的间隔, 公式 (2.7.2) 和 (2.7.3) 就是两个分离薄透镜的组合焦距公式, 当两个透镜靠在一起时, $d=0$ 。则:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (2.7.4)$$

公式 (2.7.2) 和公式 (2.7.4) 是经常使用的双胶合透镜或双分离透镜的组合焦距公式。

例 2.7.1 用下面的参数计算两分离薄透镜的组合焦距。

	表面 1	表面 2	表面 3	表面 4
半径	80	-50	-40	-1000
厚度(d)	8	50	2	
折射率	1	1.5163	1	1.6725
				1

解: 由上面的公式, 可用如下计算:

$$\varphi_1 = (n_1 - 1)(c_1 - c_2) = 0.5163 \times (0.0125 + 0.02) = 0.01678$$

$$\varphi_2 = (n_2 - 1)(c_3 - c_4) = 0.6725 \times (-0.024) = -0.01614$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - d\varphi_1\varphi_2 = 0.01678 + (-0.01614) + 0.01354 = 0.0142$$

所以： $f' = 70.5\text{mm}$

2.8 透镜的组合

我们知道，光学系统通常由多个透镜组成，把组成光学系统的各个元件当作一个整体来考虑既方便又实用。求出它们的组合主面、组合焦距，然后加以简化。把整个系统看作一个“黑匣子”。只用若干个特征点和面来表示它的结构，如图 2.6.2 所示。用主点和焦点位置来表征结构复杂的光学系统既直观又方便。可用作图法求出物像关系，也可用公式计算出物像关系。

公式(2.4.2)是单透镜的物像关系公式，同样它也适合于简化光学系统的物像关系。由图 2.5.1 可以得到 $y = lu = l'u'$ ，把 $l = y/u, l' = y'/u'$ 代入公式(2.1.51)中得到：

$$\frac{u'}{y} - \frac{u}{y} = \frac{1}{f'}$$

两边乘以 y 得到：

$$u' = u + y\varphi \quad (2.8.1)$$

图 2.7.1 是由两个组件 (透镜) 构成的光学系统， y_1 和 y_2 是光线在组件 1 和 2 上的高度， u_1' 是经过组件 1 的孔径角， d_1 是组件 1 和 2 的字面之间的间隔。对于薄透镜，就是透镜之间的间隔。

我们现在推导双组件 (薄透镜) 的组合焦距公式。设 φ_1 ， φ_2 分别为第一个组件和第二个组件的光焦度，已知 $u_1 = 0$ 。由公式 (2.8.1) 得到：

$$\varphi = \frac{u_2'}{y_1} = \frac{1}{f'} = \varphi_1 + \varphi_2 - d\varphi_1\varphi_2 \quad (2.8.2)$$

上式用焦距表示为：

$$f' = \frac{1}{\varphi} = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - d} \quad (2.8.3)$$

公式 (2.8.2)和(2.8.3) 分别是双分离组元 (透镜) 的组合光焦度和焦距公式，当 $d = 0$ 时，则：

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$f' = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2'}$$

是相接触的双透镜或双胶合适镜的组合焦距公式。

双分离透镜的组合后焦距为：

$$f_{BFL} = \frac{f_1'(f_1' - d)}{f_1'} \quad (2.8.4)$$

前焦距公式为：

$$f_{FFL} = \frac{f_1'(f_2' - d)}{f_2'} \quad (2.8.5)$$

还可以导出：

$$f'_{BFL} = f' f_1' - f' d \quad (2.8.6)$$

$$f_2' = \frac{-df_{BFL}}{f' - f_{BFL} - d} \quad (2.8.7)$$

这里的公式 (2.8.3) 和上一节得出的公式 (2.7.3) 是相同的。第 2.7 节的公式 (2.7.3) 是由近轴光线追迹得到的，而这节的公式是根据薄透镜理论导出来的。我们这样做的目的是为了加深对近轴光学概念的理解。

2.9 反射镜

具有一定曲率的反射镜也具有使光束会聚或发散的能力。也就是说，也有焦距，也可以成像。具有聚焦能力的反射镜或反射镜系统由于没有色差，对光学材料要求较低，不存在光的吸收等问题，因此应用十分广泛，特别是在红外、紫外及 X 光波段更是如此。在可见光波段它往往和透镜组合起来使用，构成折射-反射光学系统。

在对反射镜进行光线追迹时，出于反射后光的传播方向改变，因此反射后，折射率为-1。此外还要遵守下面规则：

- 1) 反射后，出于光线方向改变，因此折射率的符号改变；两次反射后符号不变。
- 2) 反射后，间隔符号改变。

3) 反射镜的半径的正负遵守前而的规定。

由上面的规定我们知道，光线自左至右为正方向，反之为负方向。如果在一个系统中有两个反射面，则折射率和间隔符号改变两次，这样一来，两次反射后，符号又恢复了原状。

图 2.9.1 说明凹面反射镜和凸面反射镜的焦点和主点位置，我们用近轴光线公式来求反射镜的焦距。

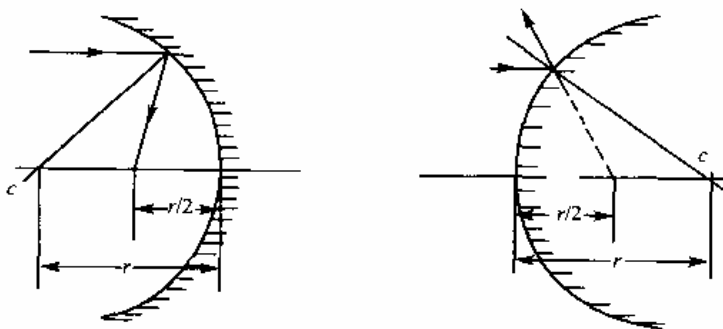


图 2.9.1 球面反射镜

由式(2.5.2)，其中的 $n_1 = 1, n_1' = -1, u_1 \rightarrow 0$ ，可得

$$f' = -\frac{r}{2} \quad (2.9.1)$$

对于凹面反射镜 r 为负值，焦距为正，表明它是会聚的。对于凸面反射镜， r 为正值，其焦距为负值，因此它是发散的。我们举一个例子来说明反射镜系统的近轴光线计算。

例 2.9.1 已知一个双反射镜望远物镜，如图 2.9.2 所示。主反射镜的半径为 $r_1 = -250$ mm，次反射镜的半径为 $r_2 = -60$ mm，两反射镜的间隔为 100 mm，求像距。

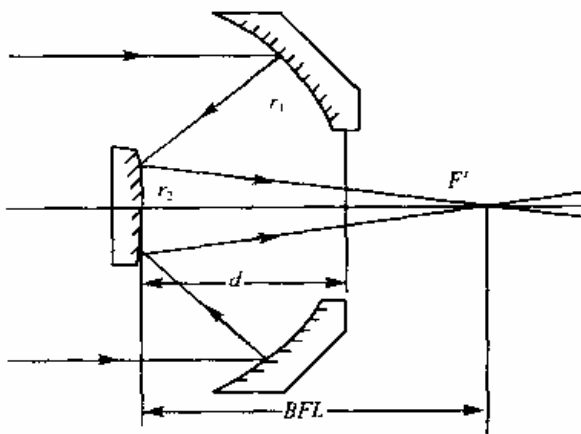


图 2.9.2 双反射镜系统

解：设目标为无限远，则 $n_1 u_1 = 0$ ，我们选择 $y_1 = 10\text{mm}$ (对于近轴光线计算， y_1 可以任选)。

由公式(2.5.2)得：

$$n_1' u_1' = y_1 (n_1' - n_1) c_1 + n_1 u_1 = \frac{10(-1-1)}{-250} + 0 = 0.08$$

$$y_2 = y_1 - d \left(\frac{n_1' u_1'}{n_1'} \right) = 10 - (-100) \left(\frac{0.08}{-1} \right) = 2$$

$$n_2' u_2' = y_2 (n_2' - n_2) c_2 + n_2 u_2 = 0.013333$$

$$l_2' = \frac{y_2}{u_2'} = \frac{2}{0.013333} = 150\text{mm}$$

$$l' = \frac{y_1}{u_2'} = \frac{10}{0.013333} = 750\text{mm}$$

在反射镜系统的计算中，常常因符号的正负运用不当而造成计算错误，为了避免这类错误，可以把反射镜系统简化成透镜系统来计算。在上例中，主反射镜的焦距为 $f_1' = 125\text{mm}$ ，次反射镜的焦距为 $f_2' = -30\text{mm}$ ，由此可简化成图 2.9.3 所示的系统。

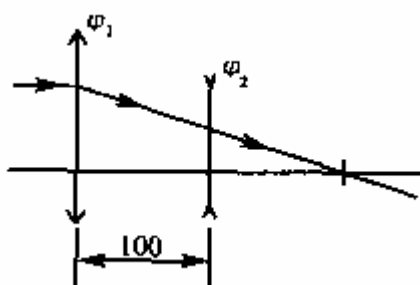


图 2.9.3 双反射镜望远物镜的等价系统

由高斯公式： $\frac{1}{l_1'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f_1'}$ ，由于 $l_1 \rightarrow \infty$ ，则有： $l_1' = f_1' = 125\text{mm}$ 。根据转面公式：

$$l_2 = l_1' - d = 125 - 100 = 25\text{mm}$$

$$l_2' = \frac{l_2 f_2'}{l_2 + f_2'} = \frac{25 \times (-30)}{25 - 30} = 150\text{mm}$$

系统总焦距：

$$f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - d} = \frac{125 \times (-30)}{125 - 30 - 100} = \frac{-3750}{-5} = 750\text{mm}$$

由此可见，这样得到的结果与前面的计算完全一样。

2.10 拉格朗日不变量

拉格朗日(Lagrange)不变量也叫光学不变量，它表征光学系统或仪器的整体性能。它对于给定的光学系统来说是一个常数。这是光学仪器中十分重要的物理量。可以用几种方法来确定这个量。同时，用光学不变量还可以求出其他有用的物理量，而不需要大量的中间运算。我们现在来求拉格朗日不变量的数学表达。

重写方程(2.5.1)

$$n'u' = y(n'-n)c + nu \quad (2.10.1)$$

用该方程追迹两条通过光学系统的光线，一条为轴上物点发出的轴上光线(也叫孔径光线)，另一条是由轴外物点发出的通过光瞳中心的轴外光线(通常称为主光线)。图 18.2.21 画出这两条光线。图中画的是简化了的光学系统，即所谓的“黑盒子”。

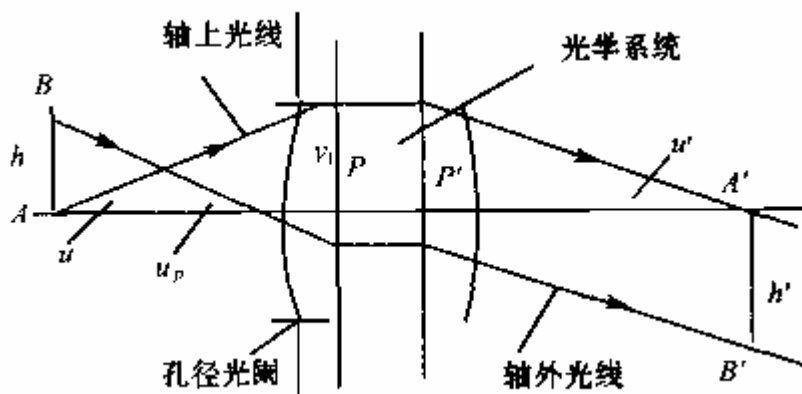


图 2.10.1 孔径光线和轴外主光线

轴上光线的追迹公式为：

$$n'u' = y(n'-n)c + nu$$

轴外光线的追迹公式为：

$$n'u_p' = y_p(n'-n)c + nu_p$$

上述两式整理后得：

$$ynu_p - y_p nu = yn'u_p' - y_p n'u'$$

在上面公式中，等式左边的角度和折射率表示表面左边（折射前）的量，等式右边的角度和折射率表示表面右边（折射后）的量。我们通常用不带撇和带撇的量表示表面折射前、后的值。这样一来，由上面的推导可以看出： $ynu_p - y_p nu$ 是一个常量。在一个给定的光学系统中，该量经过任何（多个）表面都不变。我们用转面公式 (2.5.5) 求出 y_2 后，可对下一个表面进行光线追迹。计算结果表明：量值 $ynu_p - y_p nu$ 不仅通过一个表面是不变的，就是通过表面之间的空间也是不变的。由此可以得出这样的结论：通过整个光学系统之后， $ynu_p - y_p nu$ 也是不变的。这就是著名的拉格朗日不变量(简称拉氏不变量)，或者叫光学不变量。我们用 j 表示该不变量：

$$j = ynu_p - y_p nu = yn'u_p' - y_p n'u' \quad (2.10.1)$$

作为应用例子，我们求图 2.10.1 所示的物面和像面的拉氏不变量。对于物面有：

$$y_p = h, n = n, y = 0$$

则有：

$$j = 0 - hnu = -hnu$$

对于像面有：

$$y_p = h', y = 0, n = n'$$

则有：

$$j = 0 - h'n'u' = -h'n'u'$$

根据拉氏不变量的性质，我们有：

$$hnu = h'n'u' \quad (2.10.2)$$

由上式，可得出放大率公式为：

$$m = \frac{h'}{h} = \frac{nu}{n'u'} \quad (2.10.3)$$

当光学系统处在空气中时， $n = n' = 1$ ，这时上式变为：

$$m = \frac{h'}{h} = \frac{u}{u'} = \frac{l'}{l} \quad (2.10.4)$$

上面的公式是在近轴区域导出的，当孔径角增加到一定程度时，须用其正弦值代之，即：

$$h n \sin u = h' n' \sin u'$$

如果目标处在无限远，在物方有： $u = 0, n = n'$ ，则有：

$$j = y n u_p - y_p n \times 0 = y n u_p$$

在像面有：

$$j = 0 - h' n' u' = -h' n' u'$$

由于各面的拉氏不变量是相等的，因此得出：

$$h' n' u' = -y n u_p$$

$$h' = -\frac{y n u_p}{n' u'} = -u_p \times \frac{n y}{n' u'}$$

当目标与像处在空气中且目标处在无限远时， $n = n' = 1, u_1 = 0$ ，上式变为：

$$h' = -u_p \times \frac{y}{u'} = -u_p f' \quad (2.10.5)$$

这是像高、视场角与焦距之间的重要关系式。

由上面的分析可以看出，一个近轴光学系统可完全由两条互不关联的光线所描述。一条是轴上光线，也叫孔径光线；另一条是轴外光线，也叫主光线。我们只要追迹这两条光线，就可以确定第三条光线。不必进行光线追迹了。

$$y_s = A y_p + B y \quad (2.10.6)$$

$$u_s = A u_p + B u \quad (2.10.7)$$

式中， y_s, u_s 是对应于第三条光线的值，而 y_p, u_p, y 上述的轴外光主线和轴上光线的值。对 A 和 B 求解上述方程，得出：

$$A = \frac{y_s u - u_s y}{u y_p - y u_p} = \frac{n(y_s u - u_s y)}{j} \quad (2.10.8)$$

$$B = \frac{u_s y_p - y_s u_p}{u y_p - y u_p} = \frac{n(u_s y_p - y_s u_p)}{j} \quad (2.10.9)$$

方程(2.10.6)和(2.10.7)可以对光学系统中的某一表面加以计算。对于该表面所有二条光线的高度、孔径角数据是已知的(例如第一个表面)。然后把得到的常数 A 和 B 代入式(2.10.6)和(2.10.7)中, 就可以确定第二条光线在光学系统中某些位置的 y_s 和 u_s 值了。作为上述方程应用的例子, 我们考虑一个系统, 在该系统中, 已经追了轴上光线和轴外光线。由这些数据可以求出有效焦距和前、后焦距, 不必再进行光线追迹了。如果我们有了初始光线值(第一表面处的 y, u, y_p 和 u_p)和最后光线值(最后表面处的 y', u', y'_p 和 u'_p), 我们希望确定第三条光线的最后数据(y'_s, u'_s)。已知初始数据为 $y_s=1, u_s=0$, 应用方程(2.10.6)~(2.10.9)可以求出有效焦距和前、后焦距为:

$$f'_{EFL} = \frac{y_s}{u'_s} = \frac{uy_p - yu_p}{uu'_p - u_p u'} \quad (2.10.10)$$

$$f'_{BFL} = \frac{y'_s}{u'_s} = \frac{uy'_p - y'u_p}{uu'_p - u_p u'} \quad (2.10.11)$$

$$f'_{FFL} = \frac{y_s}{u_s} = \frac{u'_p y - u' y_p}{uu'_p - u_p u'} \quad (2.10.12)$$