

1-3 薄透鏡系統

在光學的應用上，光學曲面比光學平面的應用要廣泛的多，因為光學曲面除了和光學平面一樣會造成光線方向的改變外，還能使光束產生發散 (diverge)，或會聚 (converge) 的現象，因而有不同的成像方式。

光學系統最常使用的元件，是將一塊透明玻璃相對的兩面磨成球面，一般統稱為透鏡 (lens)，此外也可將透明塑膠材料製成非球面透鏡，透鏡分類如下：

1. 凸透鏡 (convex lens)，透鏡中間部分較四周邊緣厚者稱之，圖 1-6。

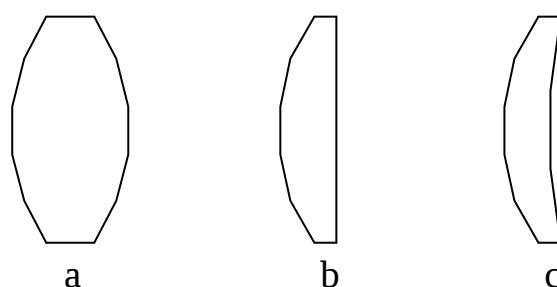


圖 1-6 凸透鏡形狀 a. 雙凸透鏡 b. 平凸透鏡 c. 月凸透鏡。

2. 凹透鏡 (concave lens)，透鏡中間部分較四周邊緣薄者稱之，圖 1-7。

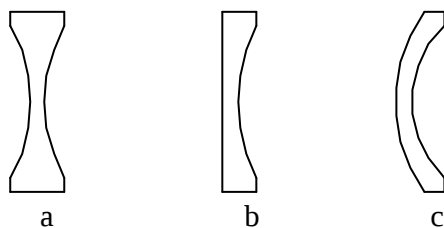


圖 1-7 凹透鏡形狀 a. 雙凹透鏡 b. 平凹透鏡 c. 月凹透鏡。

1-3.1 成像公式

我們先對公式中所用到的符號加以定義及解釋：

1. 光線由左射向右，曲面左側之距離定為負，右側為正。
2. 曲率（curvature）中心在曲面右側者，其半徑為正號。
3. 若出射或入射於曲面的光線，轉向法線（normal）為逆時鐘方向，則該角度定義為負。
4. 一般定光軸方向為 z 軸，像高方向為 y 軸， x 軸則與本文表面垂直。

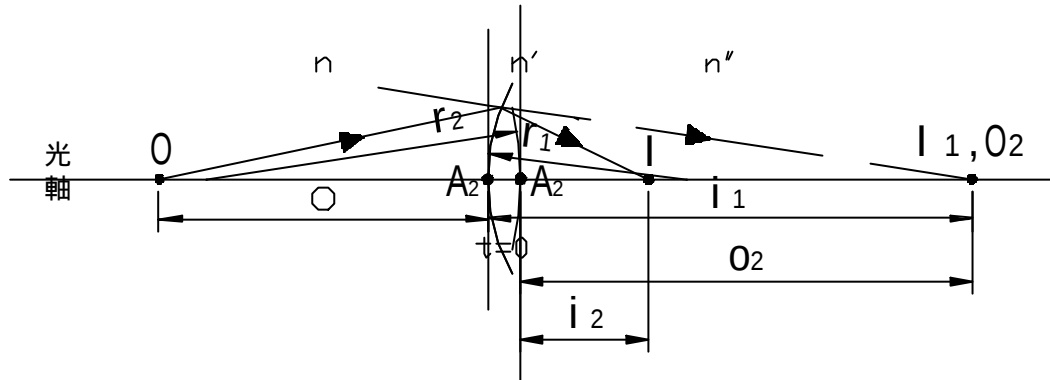


圖 1-8 薄透鏡系統。

雖然薄透鏡的厚度可以忽略不計，但基本上它仍然是由兩個單一球面，中間夾著透明材料組成，所以對這樣的系統成像就相當於做了兩次單一球面成像，物對於第一球面所成的像（或像距），就相當於第二面的物（或物距）

$$\frac{n}{o} + \frac{n'}{i_1} = \frac{n' - n}{r_1}, \quad (1-3.1)$$

式中 o 表示第一球面物點與物距， i_1 表第一球面成像點與像距（也是第二球面的物點 o_2 ）， r_1 表第一球面曲率半徑， n 表第一球面物面折

射率， n' 表第一球面像面折射率。

經過第二球面的再次成像，就完成了薄透鏡的成像過程

$$\frac{n'}{o_2} + \frac{n''}{i_2} = \frac{n'' - n'}{r_2}, \quad (1-3.2)$$

式中 o_2 表示第二球面物點與物距， i_2 表示第二球面成像點與像距， r_2 表示第二球面曲率半徑， n' 表示第二球面物面折射率， n'' 表示第二球面像面折射率。

因薄透鏡的厚度（ $t=0$ ）可以忽略不計，所以 $i_1 = o_2 + t = o_2$ ，因為物點位於第二球面之右側，所以 o_2 之符號要帶負值。將（1-3.1）式和（1-3.2）式相加可得

$$\frac{n}{o} + \frac{n''}{i_2} = \frac{n' - n}{r_1} + \frac{n'' - n'}{r_2}. \quad (1-3.3)$$

其中 o ， i_2 相當於對薄透鏡成像的物距與像距， i_2 重新用 i 符號來表示像距

$$\frac{n}{o} + \frac{n''}{i} = \frac{n' - n}{r_1} + \frac{n'' - n'}{r_2}. \quad (1-3.4)$$

假設物點在無限遠處（ $o = \infty$ ），那麼像點必在第二焦點上

$$\frac{n''}{f_2} = \frac{n' - n}{r_1} + \frac{n'' - n'}{r_2}. \quad (1-3.5)$$

假設物點在第一焦點上，那麼像點必在無限遠處（ $i = \infty$ ）

$$\frac{n}{f_1} = \frac{n' - n}{r_1} + \frac{n'' - n'}{r_2}. \quad (1-3.6)$$

由（1-3.5）式和（1-3.6）式可得薄透鏡的兩焦距長比值為

$$\frac{n}{f_1} = \frac{n''}{f_2}. \quad (1-3.7)$$

假設薄透鏡是放在均勻的空氣介質環境中，即 $n=1=n''$ ，則

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = (n'-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2}。 \quad (1-3.8)$$

此即著名的造鏡者公式 (Lens maker's formula) ^[4]。

因此可由材質折射率和曲率半徑計算透鏡的焦距。

折光本領定義為 (1-3.5) 及 (1-3.6) 式等號右邊之值

$$P \equiv \frac{n'-n}{r_1} + \frac{n''-n'}{r_2} = P_1 + P_2。 \quad (1-3.9)$$

物距、像距等量的量度都是從中心點 A 點算起，我們稱為薄透鏡的高

斯成像公式 (Gaussian formula) ^[4]。

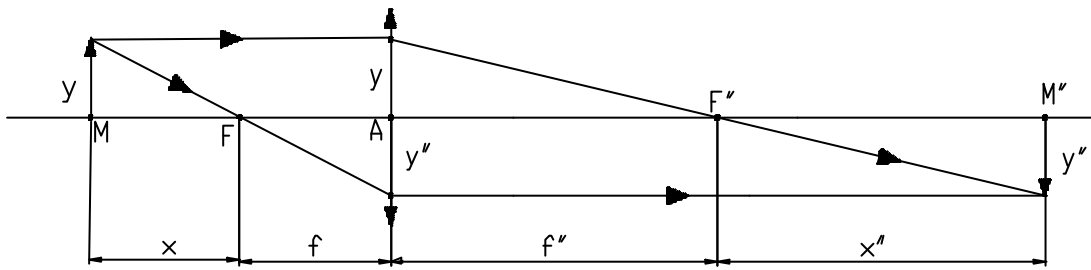


圖 1-9 薄透鏡成像圖。

我們可將成像公式寫成另一種形式。我們以第一焦平面和第二焦平面為基準來計算透鏡的物距和像距，分別用 x 及 x' 表示之，如圖 1-9 由相似三角形可得邊長成比例為

$$- \frac{y''}{y} = \frac{x''}{f''} = \frac{f}{x}。 \quad (1-3.10)$$

根據 (1-3.10) 式，我們得到了另一個形式的成像公式

$$xx'' = ff''。 \quad (1-3.11)$$

稱之為透鏡成像的牛頓式 (Newtonian form) ^[4]。

1-3.2 放大率 (Magnification)

對於薄透鏡橫向放大率的討論，我們可以直接從圖 1-9 和 (1-3.10) 式得到

$$M = \frac{y''}{y} = - \frac{x''}{f''} = - \frac{f}{x}。 \quad (1-3.12)$$

對於 $n=n''$ 的系統而言，可用更簡單的公式來計算橫向放大率的值。

因為過中心的光線不會產生偏折的情形，利用邊長成比例關係可知：

$$M = \frac{y''}{y} = - \frac{f'' + x''}{f + x}。 \quad (1-3.13)$$

例如掃描器的光學系統，物像距=250mm，物高為 216mm，像寬為 20.42mm，光學系統放大率如下式

$$M = \frac{20.42}{216} = 0.094537037 \approx 0.0945。$$

1-3.3 薄透鏡組合系統

對一個以上的薄透鏡所組成的薄透鏡系統成像，處理的方式同樣是先對第一個薄透鏡系統成像，把所成的像當作是後面一個薄透鏡的物，然後再一次成像，這個像又可看成是下一個薄透鏡的物，依此類推，直到對系統的最後一個薄透鏡成像為止，最後所成的像就是物對整個薄透鏡組合系統所成的像。

例如凸透鏡 ($f_1=10\text{mm}$) 和凹透鏡 ($f_2 = -10\text{mm}$) 放在空氣中，兩透鏡相距 15mm，在凸透鏡前 20mm ($o = 20\text{mm}$) 處，放置一物體，

物高 20mm，像的位置、大小、性質關係如下：

自公式 $\frac{1}{o} + \frac{1}{i'} = \frac{1}{f_1}$ 中帶入為 $\frac{1}{20} + \frac{1}{i'} = \frac{1}{10}$ ，可得 $i' = 20\text{mm}$ ，所以 $m_1 = -\frac{i'}{o} = -\frac{20}{20} = -1$ ，所成的第一個像在第一透鏡右邊 20mm 處，是一個大小相同、倒立的實像，而 $o' = 15 - 20 = -5\text{mm}$ ，自公式 $\frac{1}{o'} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f_2}$ 中帶入為 $\frac{1}{-5} + \frac{1}{i} = \frac{1}{-10}$ ，可得 $i = 10\text{mm}$ ，所以 $m_2 = -\frac{i}{o'} = -\frac{10}{-5} = 2$ ，整個系統的放大率為 $M = m_1 m_2 = -2$ ，可得像高 $y' = y \times M = -40\text{mm}$ ，所成的像在第二透鏡右邊 10mm 處，像高 40mm，是一個倒立放大的實像。