

第十一章 部份同調 (Partial Coherence)

11.1 簡介

11.2 同調分析初步 (Elementary Coherence Analysis)

11.2.1 同調函數 (Coherence functions)

11.2.2 Van Cittert-Zernike 定理

11.2.3 線性系統的部份同調

11.3 部份同調成像 (partially coherent imagery)

11.4 Offner 的反射系統 (catoptrical system)

11.5 Talbot 效應

參考文獻

習題

11.1 簡介

在光學設計裡，我們考慮的是光從物到像的傳播。通常我們比較不關心入射光來源。當然很清楚的，一個透鏡的成像性質之分析必須將入射光源的特性考慮進來。舉例而言，由太陽光及雷射光兩種不同照射光源其成像差異就大。雷射成像有顆粒呈纖維組織分佈（雷射斑紋 speckle），而這種雷射斑紋在一般自然光的成像是看不到的。在這一章裡，我們將分析投影機這一類的光學系統的成像過程，投影機是一種對物照射及成像兼有的光學系統。

11.2 同調分析初步 (Elementary Coherence Analysis)

11.2.1 同調函數 (Coherence functions)

一旦把照射效應放在成像中，我們就進入光學同調的領域。這是一個從統計觀點來分析光的傳播，對熟悉量子力學的入而言，一個小心的分析必須使用到統計這個事實應不會太讓人驚訝。舉例來說，對大部份熱光源而言，它是把一團原子或分子激發然後以自然輻射形式放出光。自發輻射是從上能階到低能階的任意輻射，不同原子或分子其輻射不同步，所以整個輻射的淨效應可以視作各個原子或分子以獨立不相干的方式去疊加起來。這樣的工作顯然是極其複雜。幸運的是，我們只要從古典同調理論借用一些概念，就可以來處理部份同調的成像。同調理論是光學領域一個相當完備且得到的一支。在這裡我們僅能提供一個簡略介紹。讀者若有興趣應去找出相關之文獻以得到更多訊息。

通常可以把干涉視作同調現象的一種。楊氏雙狹縫實驗中干涉條紋的可見度 (visibility) 是直接與入射光的同調性有關。一個想當然耳的解釋可以是同調光作干涉，非同調光則不。這個觀點事實上是不適切的。如同在 1860 年代由 Verdet

所示範的，我們仍然可以使用一般認為不同調的光源（如太陽光）來觀察干涉條紋。

因為我們處理的是本質隨機過程，所以用相干函數或平均會比較方便。特別是二階相干函數（second-order correlation）會用到，因為它是跟輻射的可觀測是直接有關。讓 $u(\vec{x}; \nu)$ 代表在位置 $\vec{x}$ 頻率為 ν 的單色光之複數振幅，這個振幅是個 $\vec{x}_1$ 亂數。交錯頻譜密度 $\vec{x}_2$ 函數（cross-spectral density function） W 是 u 在位置及 u 的共軛複數量在的系綜平均。用符號表示：

$$W(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \nu) = \langle U(\vec{x}_1; \nu) U^*(\vec{x}_2; \nu) \rangle \quad (11.1)$$

其中 $\langle u(\vec{x}_1; \nu) u^*(\vec{x}_2; \nu) \rangle$ 代表系統平均（ensemble average）星號代表取共軛複數。

（我們已假設跟 μ 有關的隨機過程是 ergodic，換言之，時間平均與系綜平均的結果一樣）。

通常用歸一化的相干係數（稱作複數譜同調程度（Complex degree of Spectral Coherence $\mu_{12}(\nu)$ ））會比較方便。在這個例子裡：

$$\mu_{12}(\nu) = U(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \nu) = \frac{W(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \nu)}{\sqrt{W(\vec{x}_1, \vec{x}_1; \nu) W(\vec{x}_2, \vec{x}_2; \nu)}} \quad (11.2)$$

可以證明：

$$0 \leq |\mu_{12}(\nu)| \leq 1 \quad (11.3)$$

如果 $\mu_{12}(\nu)$ 的大小是 1（亦即完美相干），這表示場在 $\vec{x}_1$ 與 $\vec{x}_2$ 兩點是完全相干，

另外一方面如果 $\mu_{12}(\nu)$ 的值為 0（亦即完全不相干）表示場在 $\vec{x}_1$ 與 $\vec{x}_2$ 兩點不相干值在 0 與 1 間表示部份同調。在此我們可以看到同調與完全不同調只是光的同調程度的二個極端情況。

在同調理論中，可觀測的量叫做「強度」（intensity）雖然比較適切的對應是輻射理論（radiometry theory）的輻射（irradiance）。在部份同調理論中強度是場的平方平均項。由於隨機遍歷性（ergodicity），強度（或頻強度 spectral intensity $I(\nu)$ ）可以由交錯譜密度函數定義：

$$I(\vec{x}_1; \nu) = W(\vec{x}_1, \vec{x}_1; \nu) = \langle |U(\vec{x}_1; \nu)|^2 \rangle \quad (11.4)$$

不同頻率分量不會干涉，因為它們彼此不同調，所以整個場的總強度是對所有分

量求積分，形式如下：

$$I_{total}(\vec{x}_1) = \int_0^\infty I(\vec{x}_1; \nu) d\nu \quad (11.5)$$

11.2.2 Van Cittert-Zernike 定理

除了雷射類的系統外，大部份光學系統其光源可以視作獨立點光源的總合。只要光學系統無法辨識這些獨立點光源，我們就可以把光源視作非同調。光源一旦被視為獨立不相干，亦即不同點光源之間沒有相干性，因為這種情況很普遍，所以先分析這類光源會是頗有用處。

為了簡單起見，我們把光源及觀測區視作平面，讓光源面（面 1）的座標是 (ξ, η) ，而觀測面（面 2）的座標是 (x, y) 。這兩個面相距 z 如圖 11.1 所示。運用 Fresnel 繞射理論，我們可以得到繞射場 $U_{II}(x, y; \nu)$ 與入射場 $U_I(\xi, \eta; \nu)$ 的關係如下：

$$U_{II}(x, y; \nu) = \frac{-ik \exp(ikz)}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_I(\xi, \eta; \nu) \exp \left\{ i \frac{k}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta \quad (11.6)$$

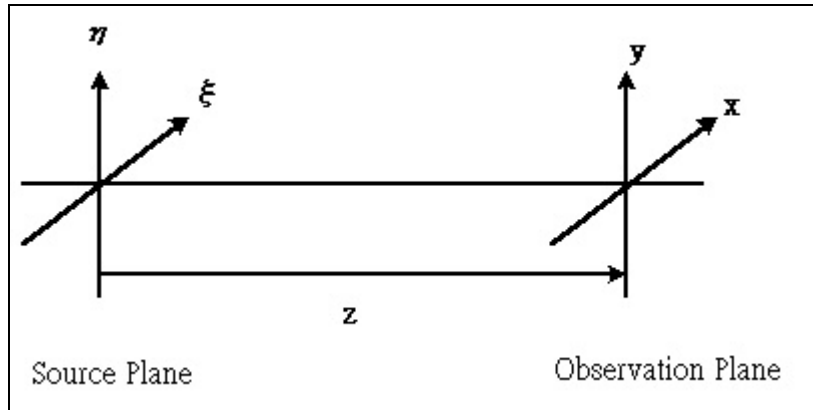


圖 11.1 光源及觀測面示意圖

在此 $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$ ， λ 是波長， c 是光速。在無窮遠處 $u_I = 0$ ，所以積分上下限

設為 $\pm\infty$ 並不礙事，我們可以使用（式 11.6）及 $W(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \nu)$ 的定義，來計算觀測面上的 W 值。

$$\begin{aligned}
 \overline{W}_{\Pi}(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \nu) &= \langle U_{\Pi}(\vec{x}_1; \nu) U_{\Pi}^*(\vec{x}_2; \nu) \rangle \\
 &= \frac{1}{(\lambda z)^2} \iiint d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 \langle U_1(\xi_1, \eta_1; \nu) U_{\Pi}^*(\xi_2, \eta_2; \nu) \rangle \\
 &\quad \exp\left\{i \frac{k}{2z} \left[(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2 - (y_2 - \eta_2)^2 \right] \right\} \quad (11.7) \\
 &= \frac{1}{(\lambda z)^2} \iiint d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 W_1(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \nu) \\
 &\quad \exp\left\{i \frac{k}{2z} \left[(x_1 - \xi_1)^2 + (y_1 - \eta_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2 - (y_2 - \eta_2)^2 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

對我們所要討論的非同調源而言，其在面交錯頻密度函數可以表示如下：

$$\overline{W}_1(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \nu) = k I_1(\xi_1, \eta_1; \nu) \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta(\eta_1 - \eta_2) \quad (11.8)$$

在此 k 是個常數， I_1 是源的強度， δ 是 Dirac delta 函數。把 (11.8) 式代入 (11.7) 式可以得到：

$$\overline{W}_{\Pi}(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \nu) = \frac{k \exp(i\psi)}{(\lambda z)^2} \iint I_1(\xi, \eta; \nu) \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda z} (\Delta x \xi + \Delta y \eta)\right] d\xi d\eta \quad (11.9)$$

在此

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{\pi}{\lambda z} (\rho_1^2 - \rho_2^2) \\
 \rho_1^2 &= x_1^2 + y_1^2, \rho_2^2 = x_2^2 + y_2^2
 \end{aligned} \quad (11.10)$$

而

$$\Delta x = x_1 - x_2, \Delta y = y_1 - y_2 \quad (11.11)$$

式 (11.9) 是 Van Cittert-Zernike 定理的一個表現形式。它是一個非同調光源其交錯譜密度是與場源強度分佈的傅利葉轉換有關。式 (11.9) 與 Fraunhofer 繞射公式看起來很像，但這兩個情況所涉及的量卻是相當不同。Van Cittert-Zernike 定理告訴我們在 (x, y) 平面上有非零相干長度會存在即使是場源是非同調。所以我們可以預期在楊氏雙狹縫實驗中，即使用的是大尺度非同調源（如太陽），只要交錯頻密度夠大，就會有干涉條紋出現。

而面的交錯頻密度與面（稱主面）源強度分佈有傅利葉轉換關係，表示這兩個量的大小是呈反變關聯。對一個無窮小的非同調源（點光源），其交錯頻密度是常數。這是合理的，因為一個點光源跟其本身是完全同調，所以我們可以期望其干涉條紋有最好的可見度。一旦非同調光源變大，則交錯譜密度 W 的大小變小，而當 I_1 變成無窮大， W 變成一個 delta 函數，在延伸光源上的每一點都產生一個最好的可見度的干涉條紋，但是每一個干涉條紋彼此之間相位不同。所以整個形狀的總對比就變差了。

11.2.3 線性系統的部份同調 (Partial coherence in a linear system)

調變轉換函數 (modulation transfer function) 及點分散函數的類似處理是在線性系統架構下自光學系統分析推演出來。線性系統的主體是衝量響答 (impulse response) 它界定一個系統對一個衝量 (δ function) 輸入的輸出, 讓光學系統輸入面 (面 I) 的座標是 (ξ, η) , 而輸出面 (面 II) 的座標是 (x, y) 。衝量響答是輸出面座標、輸入面座標及頻率 ν 的函數註記作 $h(x, y; \xi, \eta; \nu)$ 其關係示意圖如圖 11.2 :

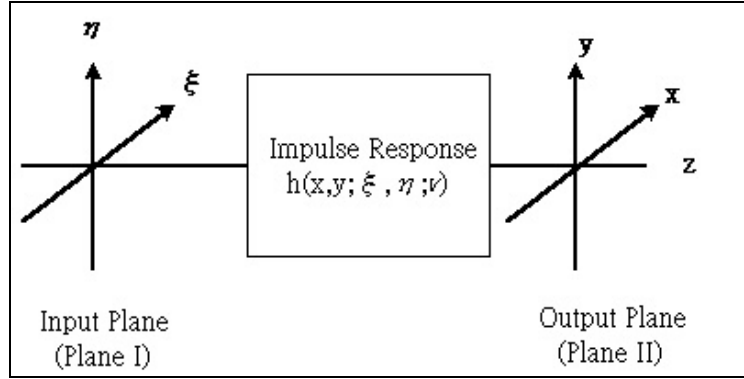


圖 11.2 輸入面座標、衝量響答及輸出面座標示意圖

在光學中, 衝量響答是點分散函數的複數振幅, 對一般線性系統, 在面 II 輸出譜密度與面 I 的輸入譜密度, 其關聯如下:

$$U_{II}(x, y; \nu) = \iint U_I(\xi, \eta; \nu) h(x, y; \xi, \eta; \nu) d\xi d\eta \quad (11.12)$$

利用式 (11.12) 及交錯頻譜密度定義, 我們可以寫出在輸出面上的交錯頻譜密度:

$$\begin{aligned} \overline{W_{II}}(x_1, y_1; x_2, y_2; \nu) &= \iiint \overline{W_I}(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \nu) h(x_1, y_1; \xi_1, \eta_1; \nu) h^*(x_2, y_2; \xi_2, \eta_2; \nu) \\ &\quad d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 \end{aligned} \quad (11.13)$$

如果我們把輸入交錯頻譜密度寫作 $\overline{W_{inc}}$ 在平面 I 的振幅穿透率寫作 t , 則 $\overline{W_I}$ 會是:

$$\overline{W_I}(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \nu) = t(\xi_1, \eta_1; \nu) t^*(\xi_2, \eta_2; \nu) \overline{W_{inc}}(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \nu) \quad (11.14)$$

在面 II 的頻譜密度 I_{II} 則可由 $\overline{W_{II}}$ 算出

$$I_{II}(x, y; \nu) = \overline{W_{II}}(x, y; x, y; \nu) \quad (11.15)$$

從一個非同調光源開始, $\overline{W_{inc}}$ 可以用 Van Cittert-Zernike 定理給出, 這會用到相當可怕的 6 維積分 (由式 (11.13) 來看)。幸運地是, 我們可以作些簡化。我們

假設衝量響應是具有空間不變性（或者稱作靜態 stationary 或等平面的，isoplanatic），換言之， h 只是 $(x-\xi)$ 及 $(y-\eta)$ 的函數。從實際觀點來看，這代表著像差基本上在整個感興趣的像平面都是常數（稱作 isoplanatic patch）。同樣，入射源的空間變動相因子（用（11.9）式中 ψ ）略去，這樣的入射源一個典型例子是 Köhler 入射（Köhler illumination）又稱作匹配入射（matched illumination）。在這些條件下，像頻譜密度如下：

$$I_{\Pi}(x, y; \nu) = \iiint d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 W_{inc}(\xi_1 - \xi_2, \eta_1 - \eta_2; \nu) h(x - \xi_1, y - \eta_1; \nu) h^*(x - \xi_2, y - \eta_2; \nu) t(\xi_1, \eta_1; \nu) t^*(\xi_2, \eta_2; \nu) \quad (11.16)$$

注意 W_{inc} ， h 及 h^* 代表照射源及成像光學，而 t ， t^* 代表著物源。整個（11.16）積分像個卷積（convolution-like）而成像方程式也可以用空間頻率（spatial frequency）表示式依舊相當複雜，但已足夠指出換到傅氏空間後計算效率大幅提高。要知道更多教學細節，讀者可以參考 Hopkins 開創性論文¹或 Goodman 的教科書²。

接下來計算頻密度的一般步驟是從一個非同調光源開始。利用 Van Cittert-Zernike 定理去算出打在物上的交錯頻密度。再使用（11.14）去得到對成像系統的輸入交錯頻密度。再利用（11.13）或者用其傅氏空間替代式去找出輸出面上的交錯頻密度，最後再使用（11.15）式去找出頻譜密度亦即輸出輸入分佈。

考慮（11.13）的二個極端例子是頗富教學用處。對於一個完全同調的入射照射而言， $\overline{W_{inc}}$ 形如：

$$\overline{W_{inc}}(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \nu) = k_{12}(\nu) \overline{U_{inc}}(\xi_1, \eta_1; \nu) \overline{U_{inc}}^*(\xi_2, \eta_2; \nu) \quad (11.17)$$

在此 k_{12} 是個複數量，而交錯頻密度積分可以分成二個部份（一個對 (ξ_1, η_1) ，另一個對 (ξ_2, η_2) ）剩下的頻強度：

$$I_{\Pi}(x, y; \nu) = \left| k_{12}(\nu) \iint t(\xi, \eta; \nu) h(x - \xi, y - \eta; \nu) d\xi d\eta \right|^2 \quad (11.18)$$

11.18) 式可以用傅利葉理論求解，就正如各別函數轉換之乘積的逆傅氏運算一般。傅氏轉換 h 被稱作同調轉換函數（coherent transfer function）。注意對同調照射而言，系統在「場」是線性，而不是在「輻射」（強度）。

¹ H. H. Hopkins, "On the diffraction theory of optical images," Proc. Roy. Soc., A217, 408-432 (1953).

² J. W. Goodman, *Statistical Optics*, Wiley, 1985.

另一個極端是對完全非同調光照射，在此情況下， $\overline{W_{inc}}$ 形如：

$$\overline{W_{inc}}(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \nu) = k I_{inc}(\xi_1, \eta_1; \nu) \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta(\eta_1 - \eta_2) \quad (11.19)$$

在此 k 是個實數常數，而 I_{inc} 是入射頻強度，在這個例子，輸出面上的頻強度為：

$$I_U(x, y; \nu) = k \int \int |t(\xi, \eta; \nu)|^2 I_{inc}(\xi, \eta; \nu) |h(x - \xi, y - \eta; \nu)|^2 d\xi d\eta \quad (11.20)$$

再一次可以看到，整個積分還是一個卷積，現在入射強度跟 $|h|^2$ 卷積在一起，而 $|h|^2$

正是非同調衡量響應，亦即點分散函數。 $|h|^2$ 的傅氏轉換正是光學轉換函數（optical transfer function）注意對非同調照射，系統還在頻「強度」上是線性的，要留意的是常見的 MTF 的概念只在這一個非同調極限才適用。

對同調及非同調兩極限而言，所要求的積分均有物項與衡量響應項的卷積形式。而適切衡量響應（不論是 h 或 $|h|^2$ ）是跟物無關。所以我們才可以說一個轉換函數（transfer function，衡量響應的傅氏轉換）把物的頻譜作相乘導出像的譜頻。然而，對部份同調照射的情況，像頻譜的計算並沒有物項的卷積形式，所以就沒有等價的轉換函數。所以，在這個情況下像輻射必須對每個所要算的物項去求解。

11.3 部份同調成像（partially coherent imagery）

如前所述，我們必須考慮自不同調光源到最後成像之間光的傳播。我們假設物體是以匹配照射的方式照射，所以像呈靜態。整個光學系統以圖 11.3 示意說明。這一類的光學系統典型例子有顯微鏡及光學製版（photolithography）系統。

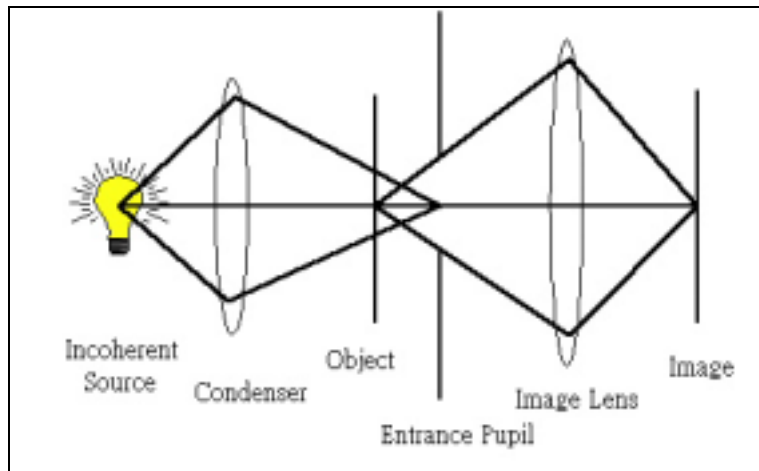


圖 11.3 光學系統示意圖

在 OSLO，只有成像光學系統需要輸入。光源及聚焦器 (Condenser) 是已假定存在。而它們的相關性質在部份同調操作條件 (partial coherence operating conditions) 指明。入射照射的同調性質是由成像透鏡的輸入瞳孔上之主光源的幾何成像所決定。這個非同調成像被叫做「等效光源」(effective source) 而且可以跟照在物上的照明之同調藉由 Van Cittert-Zernike 定理相關聯。

相對於成像透鏡的輸入瞳孔之大小，等效源最重要性質是其大小。對大多數系統來說，同調效應之所以重要是那些需要產生高品質成像的系統，因為不論幅角 (azimuth) 多少成像品質必須是均勻，所以轉動對稱軸是必須有的。所以在 OSLO 分析中，等效源必成像透鏡之輸入瞳孔名義上均設為圓形。而指定等效源的重要參數是等效源半徑對成像透鏡的輸入瞳孔之半徑比值。這個比值通常訂作 σ 。 $\sigma=0$ 表示等效源是個點，而物是同調地照射 (illuminated coherently)，當 σ 從 0 增加上，照射的同調性降低，在 $\sigma \rightarrow \infty$ 時，就變成完全非同調。對大多數物體而言， σ^2 跟完全非同調 ($\sigma \rightarrow \infty$) 就差不多是一樣。在 OSLO 設定上，等效源是個均勻盤 (uniform disk)，但也可以選成環狀 (annular) 或者是有高斯強度分佈 (Gaussian irradiance profiles)。

因為通常是設有轉換函數 (transfer function)，OSLO 必須知道所需成像的形狀與形式 (the form of the ideal image of interest)，這個理想成像由一個條狀目標物 (bar target) 所構成。條的寬度、週期及個數都被指明。設定上，成像是由暗、明間隔 (亦即 unit modulation) 的條例所組成，但調變程度 (modulation) 及背景 (background) 如果有需要可以調整。同樣地，不同列條也允許有相位穿透差異 (phase transmittance difference) 因為假設成像是靜態，所以盡可能地計算是在頻域 (Fourier domain) 上作。考慮效率 OSLO 用了快速傅利葉轉換。所以第六章所考慮的取樣條件一樣適用。在計算點分散函數的條件在計算部份同調一併適用。為避免假頻率發生 (aliasing)，對通過瞳孔直徑範圍內的光束之覓跡數總是取為在像上點 (亦即 FFT 陣列的大小) 的一半。所以，對部份同調的計算而言，其在像上的取樣間隔 Δy 值如下：

$$\Delta y = \frac{\lambda_0}{4N_0 A_0} \quad (11.21)$$

λ_0 是波長， N 、 A 是數值孔徑，同樣一維像之大小是 (叫 image Patch sign)

$$N\Delta y = \frac{N\lambda_0}{4NA} \quad (11.22)$$

N 是在像上的點數，對部份同調之計算而言，我們看到要增加像的大小是去增加 FFT 陣列中的點數 (亦即 N 值)。在這裡，由於 FFT 計算法則 (algorithm)， N 是 2 的倍數。

11.4 Offner 的反射系統 (catoptrical system)

我們以 Offner 最先設計的雙鏡、單心那一類系統（美國專利 3,748,015）來討論同調對成像的效應。就這類系統而言，把一個物放在具有相同曲率中心的平面上，其成像是 1 : 1 而且所有賽得像差(Seidel aberration)為 0。這一類系統已經被廣泛使用在光學製程的系統上。大的凹透鏡其曲率半徑是小的凸透鏡的兩倍，而孔徑阻欄（aperture stop）是在小鏡上，所以在本質上，這系統是遠心系統(telecentric)。我們以這系統為開始整個分析，並以汞的 *i* 譜線(*i*-line) $0.365\ \mu\text{m}$ 作為預設波長，其透鏡數據設定如圖 11.4，系統示意圖（layout）如圖 11.5。

*LENS DATA						
Offner Catoptric System						
SRF	RADIUS	THICKNESS	APERTURE RADIUS	GLASS	SPE	NOTE
OBJ	--	100.000000	20.000000		AIR	
1	-100.000000	-50.000000	38.000000	REFL_HATCH		
AST	-50.000000	50.000000	10.000000 A	REFL_HATCH		
3	-100.000000	-100.000000	38.000000	REFLECT		
IMS	--	--	20.000000 S			
*PARAXIAL SETUP OF LENS						
APERTURE						
Entrance beam radius:		17.251106	Image axial ray slope:		0.172511	
Object num. aperture:		0.170000	F-number:		--	
Image num. aperture: *		0.170000	Working F-number:		2.941176	
FIELD						
Field angle:		-1.1459e-17	Object height:		20.000000	
Gaussian image height:*		20.000000	Chief ray ims height:		-20.000000	
CONJUGATES						
Object distance:		100.000000	Srf 1 to prin. pt. 1:		--	
Gaussian image dist.:		-100.000000	Srf 3 to prin. pt. 2:		--	
Overall lens length:		--	Total track length:		--	
Paraxial magnification:		1.000000	Srf 3 to image srf:		-100.000000	
OTHER DATA						
Entrance pupil radius:		1.7251e+19	Srf 1 to entrance pup.:		1.0000e+20	
Exit pupil radius:		1.7251e+19	Srf 3 to exit pupil:		1.0000e+20	
Lagrange invariant:		3.450221	Petzval radius:		1.0000e+40	
Effective focal length:		--				
SPOT DIAGRAMS						
Aperture divisions:		17.030000	Gaussian apod. spec.:		Off	
X 1/e^2 entr. irradi.:		1.000000	Y 1/e^2 entr. irradi.:		1.000000	
*WAVELENGTHS						
CURRENT WVL/NM1						
1	0.365010					
	1.000000					

圖 11.4 Offner 透鏡數據設定

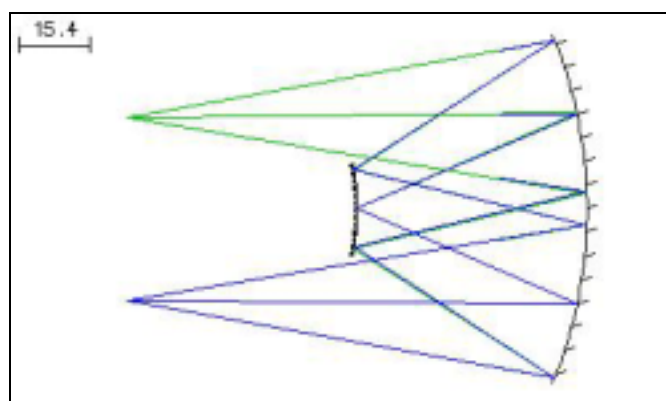


圖 11.5 Offner 系統示意圖

很明顯地，由於第二個鏡子（小鏡子）的位置關係，所以這個系統是適用於離軸物。在表面上，這個設計受限於 5 階像散（fifth-order astigmatism）。如果兩面鏡子距離有變動，則少量 3 階像散會被引入，而 3 階與 5 階像散在一物高點上會平衡、對稱。所以整個系統對物而言會有一個很好的修正區，這樣子整個光學系統

可以有個圓環視野 (ring-field), 亦即在這個圓環上, 物的成像效果很好。換言之, 視野 (field of view) 是環狀。也因此, 我們必須對透鏡設定作修改, 以便可以有想要的系統幾何形狀。我們對面 2 及面 3 輸入負的厚度選定 (minus thickness pick up) 並將面 0 及 1 的厚度設為變數。此時透鏡設定如圖 11.6 :

```

*LENS DATA
Offner Catoptric System
SRF  RADIUS  THICKNESS  APERTURE RADIUS  GLASS  SPE  NOTE
OBJ  --      100.000000 V  20.000000
1    -100.000000 -50.000000 V  38.000000  REFL_HATCH
AST  -50.000000  50.000000 P  10.000000 A  REFL_HATCH
3    -100.000000 -100.000000 P  38.000000  REFLECT
4      --        --        20.000000 S  AIR
IMS  --        --        20.000000 S

*PICKUPS
2    THM  1
3    THM  0

*VARIABLES
VB  SN  CF  TYP  MIN  MAX  DAMPING  INCR  VALUE
V 1  0  -  TH  0.100000  1.00000e+04  1.000000  0.001725  100.000000
V 2  1  -  TH -1.00000e+04 -0.100000  1.000000  0.001725 -50.000000
    
```

圖 11.6 透鏡設定數據

我們有很多方法作最佳化, 但最簡單的可能是用 OSLO 的自動誤差函數產生個誤差函數在選定的物點上量取均方根光程差(RMS OPD)。我們讓 0.95 的物高處去像散對稱 (設物高是-19.0mm)。在這個場點上, 使用誤差函數產生器的結果如圖 11.7 :

```

*RAYSET
RPT  FBY/FY1  FBX/FY2  FBZ/FX1  FYRF/FX2  FXRF/WGT  CFG/GRP
F 1  0.950000  --      --      --      --      --
RAY  TYPE  FX  WGT
R 1  Ordinary  --      0.041667
R 2  Ordinary  0.525731  --      0.208333
R 3  Ordinary  0.262866  0.455296  0.208333
R 4  Ordinary -0.262866  0.455296  0.208333
R 5  Ordinary -0.525731  --      0.208333
R 6  Ordinary  0.850651  --      0.208333
R 7  Ordinary  0.425325  0.736685  0.208333
R 8  Ordinary -0.425325  0.736685  0.208333
R 9  Ordinary -0.850651  --      0.208333
R 10 Ordinary  1.000000  --      0.041667
R 11 Ordinary  0.500000  0.866025  0.041667
R 12 Ordinary -0.500000  0.866025  0.041667
R 13 Ordinary -1.000000  --      0.041667

*OPERANDS
OP  MODE  WGT  NAME  VALUE  MONTRB  DEFINITION
O 15  M  0.500000  Orms1  2.771051  100.00  RMS(1)
MIN RMS ERROR: 2.771051
    
```

圖 11.7 誤差函數產生器的結果

在幾次疊代運算之下, 最佳化的系統的透鏡數據如圖 11.8 :

```

*LENS DATA
Offner Catoptric System
SRF  RADIUS  THICKNESS  APERTURE RADIUS  GLASS  SPE  NOTE
OBJ  --      100.870586 V  19.999020
1    -100.000000 -49.078955 V  38.000000  REFL_HATCH
AST  -50.000000  49.078955 P  10.000000 A  REFL_HATCH
3    -100.000000 -100.870586 P  38.000000  REFLECT
4      --        --        20.022394 S  AIR
IMS  --        --        20.022394 S
    
```

圖 11.8 最佳化後的系統透鏡數據

從下圖 11.9 的場曲分佈可以看去在 95% 處像散平衡已經做到。

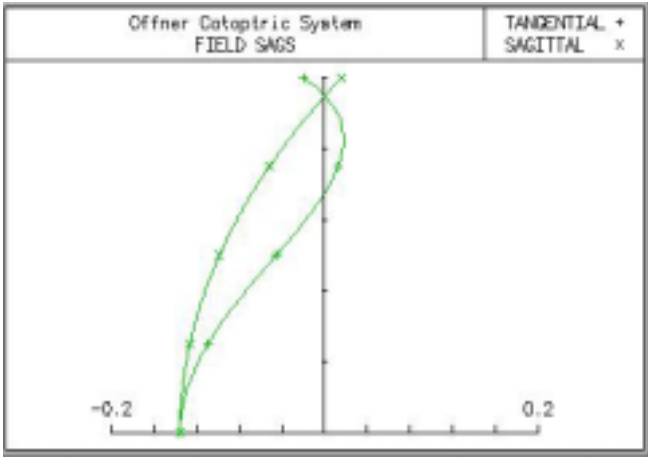


圖 11.9 場曲分佈

這個透鏡組其數值孔徑是 0.17，所以 Airy 盤是 $1.22 \lambda_0 / \text{NA} = 1.22(0.365) \mu\text{m} / 0.117 = 2.62 \mu\text{m}$ ，所以一個寬為 $7 \mu\text{m}$ 的列條像可以輕易顯示 (resolved) 而且適合用來示範同調效應。在所需的點上 (95% 物高)，整個最佳化透鏡是繞射極限，所以這點可以用來說明同調與繞射的效應。

在部份同調操作條件上，我們定義理想成像由二個列條所組成，每一個寬 $7 \mu\text{m}$ ，二個間隔 $14 \mu\text{m}$ ，整個操作條件數據如圖 11.10：

*CONDITIONS: PARTIAL COHERENCE			
Effective source rad.:	--	Inner annular radius:	--
X shift of source:	--	Y shift of source:	--
X 1/e^2 of source:	--	Y 1/e^2 of source:	--
Number of points in image:	64	Number of clear bars in image:	2
Width of clear bar:	0.007000	Period of clear bars:	0.014000
Irrad. between bars:	--	Phase between bars:	--
Background irradiance:	--		
Normalization:	Object irradiance	Use equal image space incrmnts.:	Off

圖 11.10 部份同調操作條件數據

我們改變照射特性從等效點光源(完全同調, $\sigma = 0$)到完全填滿輸入瞳孔($\sigma = 1$)來看成像；同樣地我們也要看完全非同調的極限例子成像會如何。底下是相對輻射值對位置計算結果 ($\sigma = 0$, $\sigma = 0.25$, $\sigma = 0.5$, $\sigma = 0.75$, $\sigma = 1.0$ 及完全非同調)。

圖 11.11

我們看到當照射的同調性降低，則在成像邊的干涉式環狀物就逐漸消失。在光學製程(光學製版)上，成像邊緣的斜率是最重要。改變曝光時間，高的變化值(斜率)在波長變化上會有較小的變化。

如同前面這些強度對位置分佈圖所示，除了控制成像透鏡的像差外，照射源的同調性(即 σ 值)也必須考慮，系統的整個效能才能被完全評估出來。現在讓我們看 80% 成像(像高為 $16\mu\text{m}$) 的例子，以 $\sigma=0$ 及 $\sigma=\infty$ 為例：

圖 11.12

讀者可以從圖 11.12 看得很清楚。

11.5 Talbot 效應

另一個令人驚奇的例子是 Talbot 效應，在這效應上可以再次看出同調對成像的影響。一個具有週期性空間振幅分佈的同調場，則傳播場本身具有自身成像(self-imaging)的特性，亦即像在縱向方向上特定距離會重複它自己。跟一般非同調照射下的情形來比的話，這是很不一樣，一般而言對非同調照射把觀測面自焦點移開只是讓像的品質變差。我們用焦距 100mm，數值孔徑為 0.05，波長為 $0.5\mu\text{m}$ 的完美透鏡為例作一簡單說明。透鏡數據如圖 11.13 所示：

*LENS DATA						
Talbot Effect Demonstration						
SRF	RADIUS	THICKNESS	APERTURE RADIUS	GLASS	SPE	NOTE
OBJ	--	1.00000e+20	1.00000e+14	AIR		
AST	ELEMENT	GRF	--	5.000000 AS	AIR	*
2	PERFECT	100.000000 S	5.000000 S	AIR	*	PERFECT
IMS	--	--	1.0000e-04 S			
*PARAXIAL SETUP OF LENS						
APERTURE						
Entrance beam radius: *		5.000000	Image axial ray slope:		-0.050000	
Object num. aperture:		5.0000e-20	F-number:		10.000000	
Image num. aperture:		0.050000	Working F-number:		10.000000	
FIELD						
Field angle: *		5.7296e-06	Object height:		-1.0000e+14	
Gaussian image height:		1.0000e-04	Chief ray img height:		1.0000e-04	
CONJUGATES						
Object distance:		1.0000e+20	Srf 1 to prin. pt. 1:		--	
Gaussian image dist.:		100.000000	Srf 2 to prin. pt. 2:		--	
Overall lens length:		--	Total track length:		1.0000e+20	
Paraxial magnification:		-1.0000e-10	Srf 2 to image srf:		100.000000	
OTHER DATA						
Entrance pupil radius:		5.000000	Srf 1 to entrance pup.:		--	
Exit pupil radius:		5.000000	Srf 2 to exit pupil:		--	
Lagrange invariant:		-5.0000e-06	Petzval radius:		1.0000e+40	
Effective focal length:		100.000000				
SPOT DIAGRAMS						
Aperture divisions:		17.000000	Gaussian spot, spec.:		off	
X 1/e ² entr. irradi.:		1.000000	Y 1/e ² entr. irradi.:		1.000000	
Note: This optical system contains special surface data.						
Calculations based on a paraxial raytrace may be invalid.						
*WAVELENGTHS						
CURRENT	WVL	WVS				
1	0.500000					

圖 11.13 透鏡數據設定

我們用一個週期為 $20\ \mu\text{m}$ 的等距列條作為完美影像。如果選定 FFT 大小為 64 點, (11.22) 式指示這透鏡的像板 (image patch) 大小是 $(64) \cdot (0.5\ \mu\text{m}) / (4 \cdot 0.05) = 160\ \mu\text{m}$ 。所以如果我們讓理想成像有 8 個或更多列條 (每個 $20\ \mu\text{m}$) , 則理想成像看起來就像是有無窮多個列條。(這是因為我們用了 FFT 計算法, 在其中週期性是假定無窮長)。圖 11.14 我們列出操作條件作參考:

*CONDITIONS: PARTIAL COHERENCE			
Effective source rad.:	--	Inner annular radius:	--
X shift of source:	--	Y shift of source:	--
X 1/e^2 of source:	--	Y 1/e^2 of source:	--
Number of points in image:	64	Number of clear bars in image:	8
Width of clear bar:	0.010000	Period of clear bars:	0.020000
Irrad. between bars:	--	Phase between bars:	--
Background irradiance:	--		
Normalization:	Object irradiance	Use equal image space incrmnts.:	Off

圖 11.14 部分同調的操作條件

我們現在可以對同調及非同調光求其焦上成像 (in-focus image)。可以想像得到, 在同調成像的邊緣有環狀 (干涉紋) 產生, 而在非同調光的情況下, 干涉行為依同調性變少而逐漸消失, 也會看不到調變特徵。圖 11.15 我們列出 (同調---焦位移(defocus)等於 0 及非同調---焦位移(defocus)等於 0) 二個用作參考。

- 同調-----焦位移等於 0

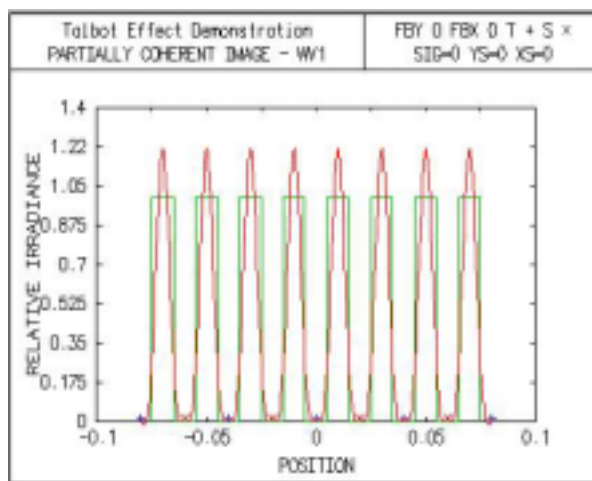


圖 11.15 (a) 同調---焦位移(defocus)等於 0

- 非同調-----焦位移等於 0

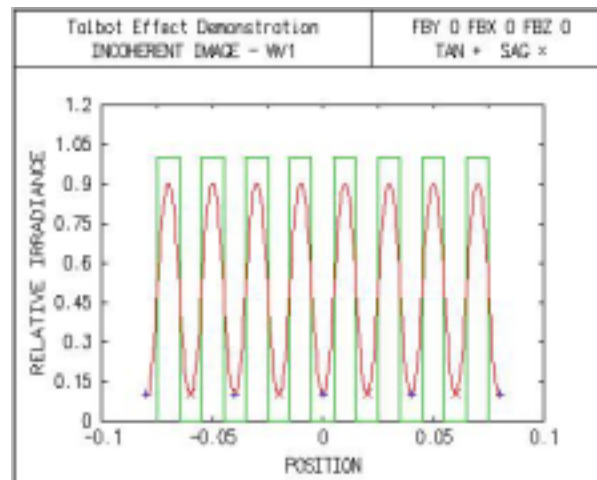


圖 11.15 (b) 非同調----焦位移(defocus)等於 0

對一個週期為 p 的物體，而照射光波長為 λ_0 ，其 Talbot 距離如下：

$$d_{\text{Talbot}} = \frac{p^2}{\lambda_0} \quad (11.23)$$

在這個例子，Talbot 距離為 $d_{\text{talbot}} = \frac{(0.02\text{mm})^2}{(0.0005\text{mm})} = 0.8\text{mm}$ 。同調與非同調成像在 0.8mm 焦位移下的結果如圖 11.15 所示(一個是同調-----焦位移(defocus)等於 0.8mm，另一個是非同調-----焦位移也是 0.8 mm)。

- 同調-----焦位移等於 0.8 mm

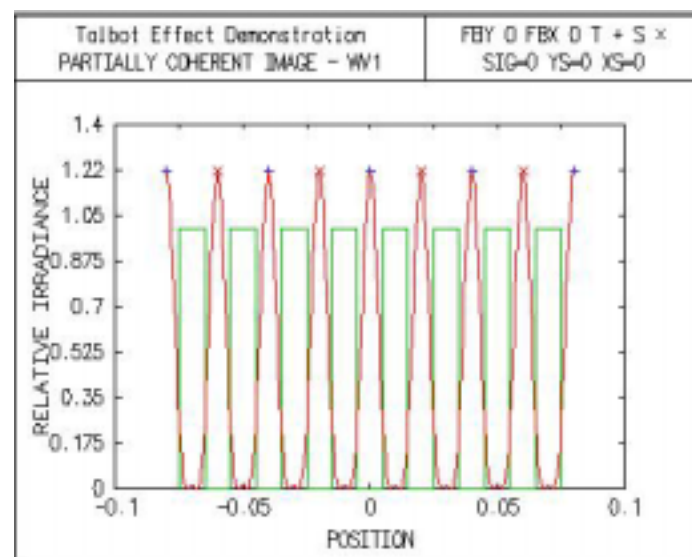


圖 11.16 (a) 同調-----焦位移(defocus)等於 0.8mm

- 非同調-----焦位移等於 0.8 mm

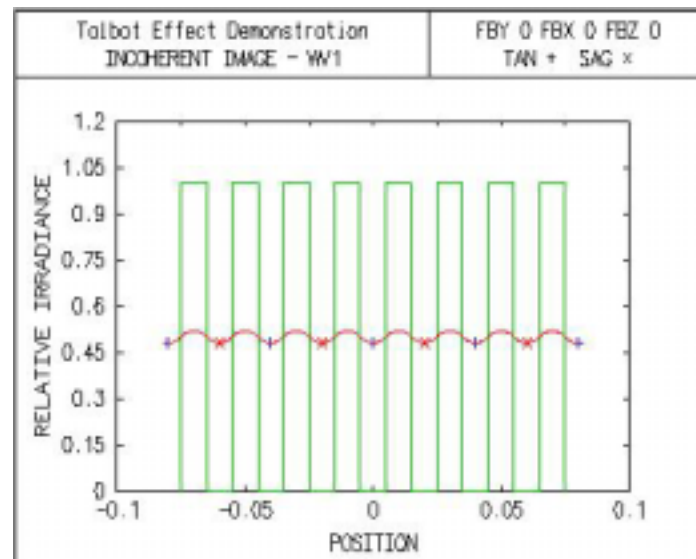


圖 11.16 (b)非同調光在焦位移 0.8 mm 上的成像

在這個焦位移下，非同調下的成像可以視作不存在，但同調成像卻跟原來焦上成像一模一樣（只是整個平移了半週期）。如果我們讓焦位移 2 個 Talbot 距離（1.6mm）則成像與焦上成像會一樣，模擬結果（同調-----焦位移=1.6mm）如圖 11.17：

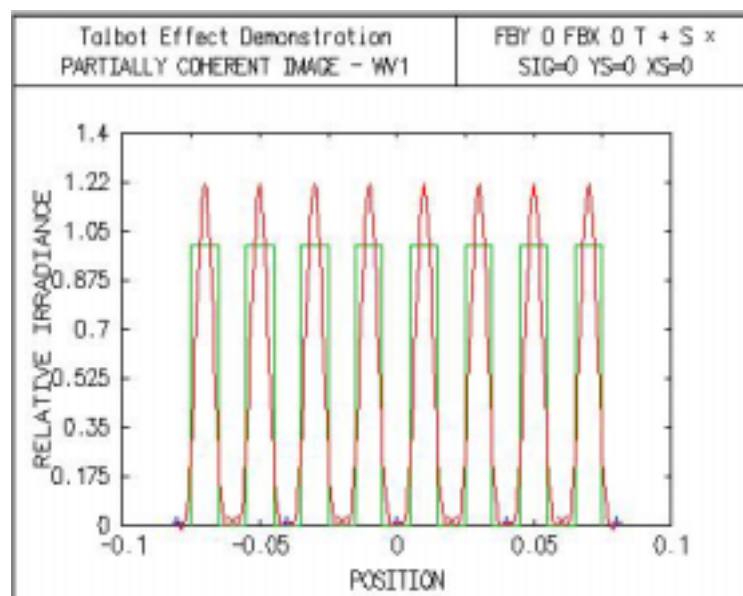


圖 11.17 同調光在焦位移 1.6 mm 上的成像

一般而言，同調成像在整數倍的 Talbot 距離移位下會重複其焦上成像。如果該整數是奇數，則整個成像會被移動半週期。

我們可以利用調變轉換函數（modulation transfer function）檢查方波的非同調焦上成像。一個頻率為 f_0 的方波其影像調變可以先利用傅立葉(Fourier)分量(如

正弦波) 將方波分解, 再算每個正弦波下的 MTF 值, 而最後的波調變值 $S(f_0)$ 形如:

$$S(f_0) = \frac{4}{\pi} \left[MTF(f_0) - \frac{1}{3} MTF(3f_0) + \frac{1}{5} MTF(5f_0) + \dots \right] \quad (11.24)$$

(11.24)式可以在諸如 W. J. Smith 寫的「Modern Optical Engineering」書上看到。對這個透鏡, 其截止頻率是 $2NA/\lambda_0 = 200$ cycles/mm, 因為我們的方波其頻率

$f_0 = \frac{1}{0.02mm} = 50$ cycles/mm 且在 (11.24) 中只有奇數 f_0 才有值, 所以我們需要

去算出軸上以頻率 50 cycles/mm 增加的 MTF。而孔徑分割數目在斑點圖分析設為 32, 所以在瞳孔位置上的取樣跟部份同調計算是一樣, 圖 11.18 我們列出調變轉換函數(MTF)相對頻率的輸出數據:

*MODULATION TRANSFER FUNCTION Y				
WAVELENGTH 1				
NBR	FREQUENCY	MODULUS	PHASE	DIFF LIM MTF
1	--	1.000000	--	1.000000
2	50.000000	0.689057	--	0.689057
3	100.000000	0.399815	--	0.399815
4	150.000000	0.149516	--	0.149516
5	200.000000	--	--	--
CUTOFF FREQUENCY 199.592593				

圖 11.18 調變轉換函數相對頻率的輸出數據

利用這些 MTF 值及式 (11.24), 我們可以找出方法調變在 50 cycles/mm 是 $S = \frac{4}{\pi}(0.689 - 0.150/3) = 0.81$ 。為了跟非同調成像計算比較, 我們列出非同調下成像的強度分佈 (incoherent image irradiance) (以 0.01mm 作單位), 極大極小均可看出:

*INCOHERENT IMAGE: MONOCHROMATIC		
WAVELENGTH 1		
NBR	Y	IRRADIANCE
1	-0.080000	0.100449
2	-0.070000	0.899551
3	-0.060000	0.100449
4	-0.050000	0.899551
5	-0.040000	0.100449
6	-0.030000	0.899551
7	-0.020000	0.100449
8	-0.010000	0.899551
9	1.3878e-17	0.100449
10	0.010000	0.899551
11	0.020000	0.100449
12	0.030000	0.899551
13	0.040000	0.100449
14	0.050000	0.899551
15	0.060000	0.100449
16	0.070000	0.899551
17	0.080000	--

圖 11.19 非同調下成像的強度分佈

選定極小 $I_{\min}=0.100449$, 極大 $I_{\max}=0.899551$, 則調變 $S = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = 0.80$,

這個值跟前面 $S=0.81$ 非常靠近 , 雖然方法完全不同。

參考文獻

- [1] OSLO Optical Reference version 5 (Sinclair Optics, 1996)
- [2] OSLO Optical Reference version 6.1 (Lambda Research Corp., 2001)

習題

1. 討論 Tablet effect 有何用處？如果不是完美透鏡，Tablet effect 會如何？
2. 討論 Van Cittert-Zernike 定理，並舉出更多實例。