

第三章 單色像差 (monochromatic aberration)

3.1 簡介

3.2 軸對稱系統的對稱特性

3.2.1 光束的指明 (The specification of rays)

3.2.2 光線攔截曲線 (ray-intercept curves)

3.2.3 彗差及像散的像差 (comatic and astigmatic aberrations)

3.2.4 離焦 (defocusing)

3.2.5 場曲及像散 (curvature of field and astigmatism)

3.2.6 畸變 (distortion)

3.3 像差多項式 (aberration polynomials)

3.4 像差型態 (aberration types)

3.4.1 球面像差 (spherical aberration)

3.4.2 線性彗差 (linear coma)

3.4.3 線性像散 (linear astigmatism)

3.4.4 畸變 (distortion)

3.4.5 軸外球差 (oblique spherical aberration)

3.4.6 橢圓彗差 (elliptical coma)

3.4.7 瞳孔像差 (pupil aberration)

3.5 像差係數之計算 (computation of aberration coefficients)

3.6 Aldis 定理 (Aldis theorem)

3.7 Zernike 分析 (Zernike analysis)

參考文獻

習題

3.1 簡介

評價光學系統的成像可以使用直接的光線覓跡或像差理論來執行。光線覓跡法對所追蹤的光束給予正確結果，而像差理論則對系統的整個視場與孔徑給予近似結果。

像差理論以從一個理想像點的光線偏移量，考慮光學影像中的缺陷，或是由理想參考球的波前偏移之多項式展開來描述，並以物體及瞳孔座標來寫這些量。僅使用近軸光線數據就可以計算展開係數。由像差理論為基礎所作的正確與否與展開的多項式級數及所研究的特殊系統有關。對於單色光，OSLO 計算到第三階 (Seidel)及第五階 (Buchdahl)像差，而球面像差則是到第七階計算。

像差理論利用光學系統的對稱來減少在像差多項式中的項目數目。在此章中，我們對於影像估算作細節性的研究，這些結果的大部份也適用於光線覓跡分析。

3.2 軸對稱系統的對稱特性 (Symmetry properties of centered system)

一個軸對稱光學系統包含旋轉對稱面 (rotationally symmetrical surface)，其對稱軸定義為光軸 (optical axis)，這樣系統不只在對於光軸的絕對旋轉下是不變的，對任何包含光軸的平面上的反射下也是不變。

考慮兩個與光軸正交的平面，對一個軸對稱系統而言，影像的理想狀態是一個平面上的物在另一個平面上形成一個尖銳的(sharp)及沒有畸變(undistorted)的像，這兩個面稱為共軛(conjugate)。

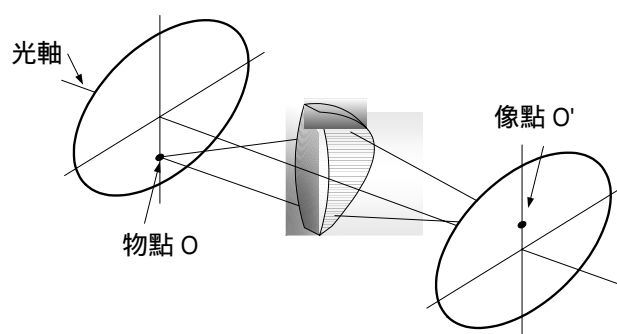


圖 3.1 光學系統的共軛面

參見圖 3.1，考慮一個軸對稱系統的物空間中的任意點 O ，若所有由 O 發出的光線通過像空間上的單一點 O' ，則稱 O 點的影像為共點的 (stigmatic)。軸對稱系統的定義暗示了下面的理論是成立的：若 O' 是某一點 O 的共點像 (stigmatic image)，則 O 與 O' 這兩點躺在包含光軸的平面上，此平面稱為子午平面 (meridional plane)。(見圖 3.2)

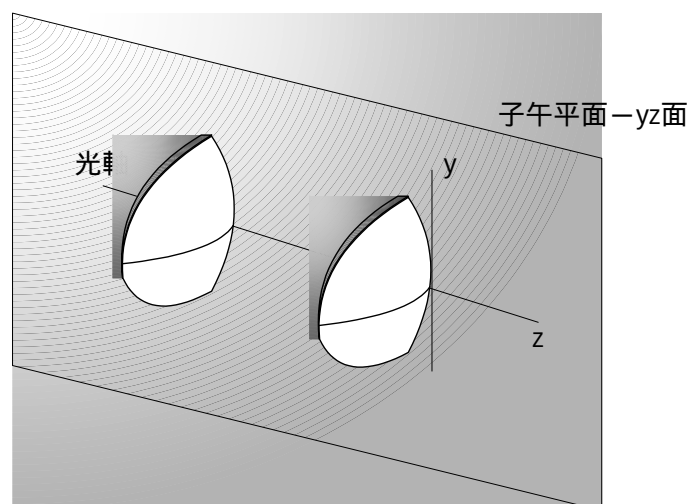


圖 3.2 子午平面 (meridional plane) 示意

接下來假設 O 點被限制在物平面上，而且所有這些點的像都是共點的，根據軸對稱系統的定義，一個正交於光軸的平面 P 的共點像是相對於光軸而改變的面，若此面不是平面的，則我們說像有場曲 (field curvature)，而且將其歸類為像的缺陷 (defect) 或是像差 (aberration) ¹。

考慮物平面的共點像也是一個平面的案例，在物平面上的某些曲線的像也將會是像平面上的曲線，但通常與原始曲線不是幾何相似。則我們可以說這個案例中，像有畸變 (distortion)。若像沒有畸變，則在影像中某些特徵長度與相關的物體中的長度之比例就是放大率 m ，即像的特徵常數。

如果物點 O 的座標是 (h_y, h_x) ，而其共點像點 (stigmatic image point) O' 是 (h'_y, h'_x) ，若有下列關係，則 O 成像到 O' 不會有畸變。

$$\begin{aligned} h'_y &= mh_y \\ h'_x &= mh_x \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 m 是像的放大率，而且與 h_y 和 h_x 無關。

一個垂直光軸的平面物體其理想影像(ideal image)滿足三個情況，即共點 (stigmatic)、無場曲 (free of field curvature) 和無畸變 (free of distortion)。

任意軸對稱系統的一個重要特性是其近軸影像(paraxial imagery)對在剛剛的討論中而言是理想的。光學設計是處理光學系統使得一個非近軸物體的實際影

¹ 此處對像差的規範不是建立在近軸光學而已，而是完美成像。

像與理想影像一樣。通常某些從 O 點出發的絕對光線將通過 O' 點附近座標為 (h_y', h_x') 的 O' 點，這裡的 (h_y', h_x') 不滿足 (3.1) 式，所以又定義了此光線的偏移量 (displacement) $(\varepsilon_y, \varepsilon_x)$ ：

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= h_y' - mh_y \\ \varepsilon_x &= h_x' - mh_x\end{aligned}\quad (3.2)$$

此偏移量與光線有關，而且在影像為理想時會為 0。然而，實際系統都有像差。在這裡主要討論軸對稱系統下的偏移量 $(\varepsilon_y, \varepsilon_x)$ 的量化圖像。

3.2.1 光束的指明(The Specification of rays)

在光學系統中傳播的光線藉由與兩個沒有共軛的面相交的點之座標來指明。由於我們感興趣的是在一平面上的物體之影像，所以物平面(object plane)理所當然是此兩面中的一面。在第二章，我們已看到了對於由真實光束而來的影像，Abbe 正弦條件(Abbe's Sine condition)顯示了放大率是由物空間及像空間中的正弦比例來給定的。對於第二個面的自然選擇就是一個中心落在物點上的球面，這就是 Hopkins 所稱的正則座標(canonical coordinates)。這也是在 OSLO 中用來精確的光束覓跡的預定算則，我們稱之為等光程描光法 (aplanatic ray aiming)。就像差理論的發展而言，像差是由近軸光學延伸過來。由於近軸光束的選定是就鏡面的正切平面再折射至球面，所以比較偏好選擇一個平面。通常的做法是選擇近軸入射瞳孔，我們稱之為近軸描光法 (paraxial ray aiming)。等光程與近軸描光法的差別只是在物距(object distance)為有限(finite)時看得出來。另外若物空間的數值孔徑小於 0.5 時，差異也可以忽略。等光程描光法是由以方向餘弦 (direction cosine) 當作量測單位而得，近軸描光法則是由方向正切 (direction tangent)。

若我們定義在入射瞳孔上的座標為 (y, x) ，則光線可以由四個座標 (h_y, h_x) 及 (y, x) 來指定。由於在這裡的討論限制在軸對稱系統 (centered system)，所以所有對於光軸的系統旋轉的結果都是不變，我們使用這個事實來除去 h_x ，也就是，我們永遠可以旋轉系統來使得 $h_x=0.0$ 。所以我們剩下 3 個量 (h_y, y, x) 來指定光線。

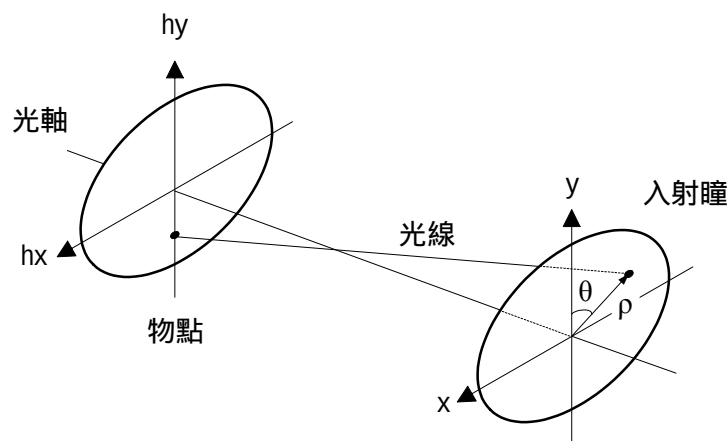


圖 3.3 光線的指定

參見圖 3.3，通常藉由極座標 (ρ, θ) 來指明瞳孔座標(pupil coordinates)：

$$\begin{aligned} y &= \rho \cos \theta \\ x &= \rho \sin \theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

一條在 yz 平面上的光線，也就是 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$ ，稱為子午光線(meridional ray)，

而一道光線的 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ，則是弧矢光線(sagittal ray)。

除了座標系統的選擇，在 OSLO 中座標的實際值已對孔徑及場的邊緣歸一化。換言之， ρ 與 h 的值介於 0.0 至 1.0 之間。在 OSLO 中，最大的孔徑界限是由入射光束半徑(entrance beam radius)EBR 給定，而最大的物高(object height)稱為 OBH。所以欲轉換比例孔徑(fractional aperture)或場座標到世界座標(world coordinates)，則 ρ 及 h 必須乘上 EBR 及 OBH(亦即以 EBR 或 OBH 為單位)。

3.2.2 光線攔截曲線(ray-intercept curves)

一些繪圖技巧常為透鏡設計者使用以表現像差函數，這些技巧是根據理想成像下，一物點的像是共點像(stigmatic)，也就是像差函數 (ϵ_y, ϵ_x) 與光線座標 (ρ, θ, h) 無關。在光學設計中最常顯示的是光線攔截曲線(ray-intercept curves)，這是一個以孔徑座標為變數的光線偏移量(ray displacement)函數圖形。雖然光攔截曲線通常是由光線覓跡產生，但它們在描述像差上的相當有用的。在此節中，我們考慮一個軸對稱的雙透鏡(centered doublet lens)²的光線

² Doublet lens 已商用化，可以藉由 catalog lens 去選取。Edmund 是頗為常見。Files> New Lens> (file types) catalog lens > Lens type (catalog)> doublet (Edmund) 即可挑出。

攔截曲線來描述像差，此透鏡組顯示於圖 3.4 的右下角，而三個場點的光線攔截曲線在圖的左邊三個場點分別是在軸上(on-axis)，離軸 70%(0.7 field)，離軸最遠(full-field)。

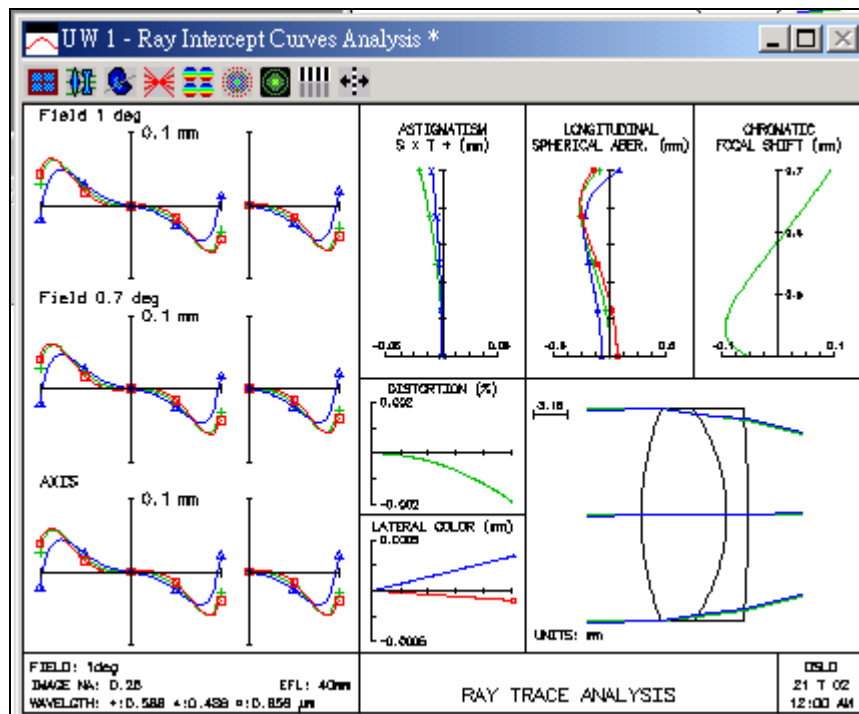


圖 3.4 Edmund 雙透鏡的光線攔截曲線

Surface Data < Database \lib_public_prm.cdb

1.0

Gen Setup Wavelength Field Points Variables Draw On Group Notes

Lens: No name Zoom 1 of 1 Efl 40.037184

Ent beam radius 10.000000 Field angle 1.000000 Primary wavln 0.587560

SRF	RADIUS	THICKNESS	APERTURE RADIUS	GLASS	SPECIAL
OBJ	0.000000	1.0000e+20	1.7455e+18	AIR	
AST	EACH32722	10.000000	10.000000	FIXED	F
3		34.398261	10.000000	AIR	
IMS	0.000000	0.000000	0.698852		S

圖 3.5 Edmund doublet (EACH32722)的透鏡數據

圖 3.5 為其透鏡數據，注意此時視角為 1 度。³參見圖 3.4 左邊由下而上分別為：軸上(on-axis)，離軸 70%為 field 0.7 deg，離軸最遠時(full-field)為 field 1 deg。

考慮一個在光軸上物體的子午面曲線 (meridional curve)，若此光線完全地

³ 另外內定有三個波長，分為 0.587560 μm ，0.486130 μm ，與 0.656270 μm 。

平躺在系統的子午平面 (yz 平面) 上, 則稱此光線為子午面光線 (meridional ray)。如果物體躺在子午平面, 則在系統的物空間內的子午平面之光線座標在它經過系統時仍將保持在此平面上。很清楚地, 一個形成完美影像的系統的子午光線截取曲線 (meridional ray-intercept curve) 是沿著橫座標的一條直線。此外, 對於一個沿著光軸自既定像平面位移 (nominal image plane) 且有完美影像的系統, 其光線截取曲線是一條斜率不為 0 且通過原點的斜直線。

在軸對稱系統的對稱觀點中, 由軸上物點出發且孔徑為 ρ 的光線像差與孔徑 ρ 的像差大小相同, 符號相反。所以, 藉由繪出由光軸物點出來的子午光線之像差, 其曲線對於原點永遠是反對稱的。在 OSLO 中, 標準格式顯示 ε_y (稱為 DY) 相對於在 $x=0$ 的子午面的比例孔徑座標 y (稱為 FY), 也就是 $\rho \cos \theta$ 中 $\theta=0$; 也可以是 ε_x (稱 DX) 相對於 $y=0$ 的弧矢比例孔徑座標 x (稱 FX) (sagittal fractional aperture coordinate), 即 $\theta=\pi/2$ 的 $\rho \sin \theta$ 。由於對稱性, 對於一個軸上的物點, 所有子午線 (meridional curve) 只有一半是獨立, 不相關。

在前述的例子中, 軸上點的光線截取曲線展示了影像的三個容貌。參見圖 3.4 左邊最下圖, 第一是像平面在近軸焦點 (paraxial focus) 上。這是因為由光軸附近的孔徑座標來的光線位移非常小的關係; 第二是此系統有負的 (修正不足) 低階像差以及正的 (過度修正) 高階像差, 這可以由觀測光線位移在孔徑座標增加時變為負值, 但在孔徑約 0.8 時轉向,⁴ 而在邊緣時為正值來理解。最後, 除了由孔徑邊緣來的光線之外, 所有光線有小於 $0.2\mu\text{m}$ 的位移, 所以我們期望軸上影像 (axial image) 由此半徑 $0.2\mu\text{m}$ 和約 $1\mu\text{m}$ 的光斑組成。

從 0.7 區域及邊緣場的離軸點之子午曲線 (DY v.s. FY) 來看, 它顯示像差的增加及對 y 軸沒有對稱性。子午曲線對於 y 軸既不是對稱也不是反對稱, 意指在這些場點的像同時有彗差 (coma) 及像散 (astigmatism)。參見圖 3.4 左邊中間圖。

假設物體躺在子午平面上, 一道弧矢光線 (sagittal ray) 定義為與入射瞳孔相交於 $\theta=\pm\pi/2$ 的點之光線。軸對稱系統的對稱性並不代表在像空間中, 這些光線將落於垂直子午平面的平面上, 也不代表包含了理想影像。相反地, 一道弧矢光線 (sagittal ray) 的像差項通常都不為零, 雖然 ε_y 通常都小於 ε_x (在 OSLO 中, 正常只畫出 DX vs. FX 的弧矢曲線, 但也可以選擇畫 (DY vs. FX))。不論如何, 一個軸對稱系統的對稱特性暗示了如果弧矢光線 (0, X) 的位移是 $(\varepsilon_y, \varepsilon_x)$, 則弧矢光線 (0, -x) 的位移必須是 $(\varepsilon_y, -\varepsilon_x)$, 這是因為影像必須對稱於子午平面。因此, 我們只需要考慮一半孔徑 (超過或不超過光軸) 的弧矢光線的像差。

⁴ 雖然不同 doublet lens 會有不同, 但此處說明頗為類似。

對於離軸點(off-axis)的弧矢曲線 (DX V.S. FX) 與軸上(on-axis)曲線相似，這是因為由物點來看的透鏡之弧矢截面積 (sagittal cross section) 在物點離開光軸時，不像子午面部分改變那麼快速。參見圖 3.4 左邊有關 DX V.S. FX 部分。

3.2.3 彗差及像散的像差 (comatic and astigmatic aberration)

由於在一個軸對稱系統中，軸上影像必須對理想像點有完全地徑向對稱，所以即使實際影像不是共點的 (far from stigmatic)，也有可能精確地找出理想影像的位置。在離軸的案例中，理想影像必須落於子午平面上。在進一步的範例中，除了假設有它的子午截面積當作對稱線之外，影像也對稱於垂直於子午平面的線。如此它也必須對稱於這兩條對稱線的交點 O'。既然一個光學系統對一個給定物點只產生單一理想影像，上面所定義的 O'點事實上必須是理想影像。當然這是假設沒有畸變 (distortion) 之下才成立。

在上面的討論觀點中，如果影像對稱於一點，則找到理想影像的精確位置是一個簡單的任務，但若沒有對稱，則會相當困難。前人工作已經證明討論一個點物體的像差我們可以將像差分解成兩個部份。這兩個部份是根據它們在孔徑座標 ρ 符號的改變下如何轉換來定。注意 ρ 符號的改變等於對角度 θ 值改變 π 。

我們已經看到由於軸對稱系統的對稱性，一條光線的 x 位移是對稱於 y 軸。一條光線 (ρ, θ, h) 的 y 位移可以寫成兩個部份的合，亦即：

$$\varepsilon_y(\rho, \theta, h) = \varepsilon_s(\rho, \theta, h) + \varepsilon_c(\rho, \theta, h) \quad (3.4)$$

其中

$$\begin{aligned} \varepsilon_s(\rho, \theta, h) &= \frac{1}{2} [\varepsilon_y(\rho, \theta, h) - \varepsilon_y(-\rho, \theta, h)] \\ \varepsilon_c(\rho, \theta, h) &= \frac{1}{2} [\varepsilon_y(\rho, \theta, h) + \varepsilon_y(-\rho, \theta, h)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

ε_s 及 ε_c 這兩項是光線 (ρ, θ, h) 的像散(astigmatic)及彗差(comatic)像差在 (3.4) 式中分解像差的重要性及理由可以由 ε_s 及 ε_c 的成像來理解。首先需要注意的是 ε_s 在 ρ 的符號改變下也會跟著改變，所以對應於影像的 ε_s 將對稱於理想影像，也就是，影像上若有點 ($\varepsilon_y, \varepsilon_x$)，也會有一個點 ($-\varepsilon_y, -\varepsilon_x$)，而且若產生光線的孔徑座標是 (ρ, θ, h)，則也含有光線是來自 ($-\rho, \theta, h$)。在此高度像差對稱性下，有時稱 ε_y 是光線 (ρ, θ, h) 的對稱性像差 (symmetrical aberration)。接下來考慮彗差像差 ε_c ，在 ρ 的符號改變下此項是不變的。因此在入射瞳孔座標 (ρ, θ, h) 與 ($-\rho, \theta, h$) 這兩道光線將通過影像的同一點。所以通常影像不對原點對稱，所以有時候稱為光線 (ρ, θ, h) 的非對稱像差 (asymmetrical aberration)。

再來看看將光線截取曲線 (ray-intercept curves) 的分解應用到圖 3.4 的範例中，圖 3.6 是對 0.7 場點的子午曲線分解成彗差(comatic)及像散(astigmatic)兩項的結果。⁵

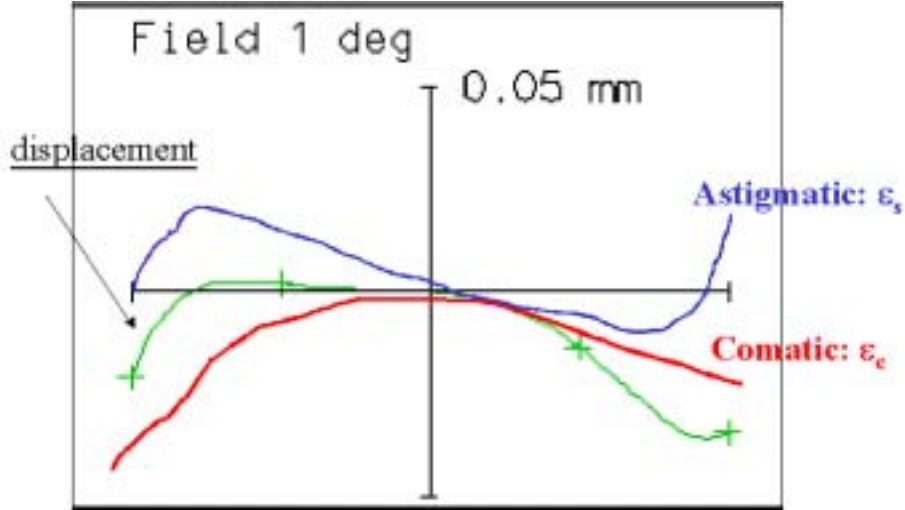


圖 3.6 彗差(comatic)及像散(astigmatic)，縱軸為差量(DY)，橫軸為 FY。

ϵ_y 分解成像散(astigmatic)與彗差(comatic)兩項顯示了一個特性：既然 ϵ_s 必須對稱於理想影像，則影像上的任何非對稱是由彗差像差的非對稱性造成。

3.2.4 離焦 (defocusing)

在前言部分中我們提及為了使一個影像是理想的，必須滿足三個條件。第一個是共點 (stigmatic)，第二個是沒有場曲 (curvature of field)，第三是沒有變形(distortion)。在這節將討論與像散、場曲有關的像差。這兩種像差將直接關係到影像的離焦與否。

考慮在像空間內一個由近軸空間位移了 ϵ_z 的平面。在此平面上，光線的高度可寫成：

$$\begin{aligned}\bar{h}'_y &= \epsilon_y + \epsilon_z v'_a y + (m + \epsilon_z v'_b) h_y \\ \bar{h}'_x &= \epsilon_x + \epsilon_z v'_a x + (m + \epsilon_z v'_b) h_x\end{aligned}\quad (3.6)$$

注意到 (3.6) 式假設 ϵ_z 夠小以致方向正切 (就是 v'_a 及 v'_b) 的近軸近似是允許的。只要下式成立，則移動了的像平面上的影像將是共點的(stigmatic)：

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_y &= \epsilon_y + \epsilon_z v'_a y \\ \tilde{\epsilon}_x &= \epsilon_x + \epsilon_z v'_a x\end{aligned}\quad (3.7)$$

⁵ 此處是示意畫法，波長則只用單波長 0.587560 μm 為例。

在移離開的平面上的像高與物高 (h_y, h_x) 成比例，而其比例常數為：

$$\tilde{m} = (m + \varepsilon_z v'_b) \quad (3.8)$$

所以可以稱方程式 (3.7) 及 (3.8) 的量為移動的像平面之像差及放大率。從式 (3.7) 中，可以看到由量 ε_z 造成的離焦效應由 $(\varepsilon_z v'_a y, \varepsilon_z v'_a x)$ 表示，也因此項稱為離焦項 (defocusing term)。關於離焦項，有一些需立即注意的是，首先它與孔徑座標有關，但與物高無關；第二是它很明顯的是像散像差。綜合這兩點，暗示了離焦可用來改善像散像差，但任何影像的非對稱性不能由離焦所控制。事實上，很容易就可以解釋如果在理想影像平面上的像差是純粹的彗差，則在由理想像平面距離 $\pm \varepsilon_z$ 的像平面的影像是相同的，換言之，一個彗差影像對稱於理想像平面。

有一個簡單的方法來決定在子午曲線上的焦距位移的效應，這是根據 (3.7) 式，由繪出一條在光線截取曲線 (ray-intercept curves) 上經過原點且斜率為 $\varepsilon_z v'_a$ 的直線來決定。由此線到子午曲線且平行於 ε_y 軸的距離是位移像平面上的子午面像差 (meridional aberration)。

3.2.5 場曲及像散 (curvature of field and astigmatism)

假設在理想平面上的影像是共點的 (stigmatic)，由 (3.7) 式可知，在一些位移像平面上像差正比於孔徑 (y, x)。在位移平面上形成的像是圓形的，而且強度均勻，像的半徑正比於孔徑 ρ ，其離焦值為 ε_z 。我們可以反向觀測，如果在理想像平面上的影像有這些特性，就可能找到一個影像是共點的位移像平面。

假設在理想像平面上的像差由下式給定：

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= ky \\ \varepsilon_x &= kx \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中 k 為常數。根據 (3.7) 式，欲獲得共點影像所需要的位移 ε_z ：

$$\varepsilon_z = \frac{-k}{v'_a} \quad (3.10)$$

如果正比於 k 的常數是 h 的函數，我們將有平面物體 (plane object) 的共點影像在旋轉對稱面上形成，其凹陷 (sag) ε_z 由 (3.10) 式給定。在此案例中，影像會有場曲。

如果像差由 (3.9) 式給定，則子午 (meridional) 及弧矢 (sagittal) 光線截取曲線的斜率相等，當然情況也未必一定如此，像差不見得要由 (3.9) 式決定。例如考慮在理想像平面上的像差之情況是由下式給定：

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= k_y y \\ \varepsilon_x &= k_x x\end{aligned}\quad (3.11)$$

子午曲線的斜率是 k_y ，而弧矢曲線的斜率是 k_x ，這兩個斜率皆與 h 有關。我們可以定義兩個類似 (3.10) 式的量來求得子午面光線或弧矢光線的共點影像所需的位移。子午面與弧矢的場面 (meridional and sagittal field surface) 是不同，而這個事實意指影像有像散 (如果 $k_x=k_y$ ，我們則有純場曲)。子午面影像的位置有時稱為正切焦點 ε_{zT} (tangential focus)，而弧矢面的影像有時則稱為弧矢焦點 ε_{zS} (sagittal focus)。

一個系統的像散與場曲通常是由所謂的場曲線 (field curve) 來表現。凹陷 ε_{zT} 及 ε_{zS} 畫成 h 的函數， h 為縱座標，在圖 3.4 中的右上角的圖即可當作例子來說明。

在討論之前，我們必須指出，當像差只是由像散 (astigmatism) 及場曲 (curvature of field) 所引起時的成像是甚麼。如果暫時將 ε_y 寫成 y ， ε_x 寫成 x ，則我們得到一個特殊物高 h 在一個位移像平面上的影像的參數方程式：

$$\begin{aligned}y &= (k_y + \varepsilon_z v'_a) \rho \cos \theta \\ x &= (k_s + \varepsilon_z v'_a) \rho \sin \theta\end{aligned}\quad (3.12)$$

這兩個方程式指出關係到像散 (astigmatism) 及場曲 (curvature of field) 的孔徑曲線是一組中心在理想影像上的橢圓，其軸平行座標軸，像斑也是橢圓的，並且對稱於理想影像。當位移像平面的位置改變，則橢圓的軸長也會變動。特別是在正切焦點上 ($\varepsilon_z=\varepsilon_{zT}$)， y 也同樣地消失，此時影像是一條垂直於子午平面且通過子午面焦點的直線，這又叫作正切焦線 (tangential focal line)。相似地，在弧矢焦點上 ($\varepsilon_z=\varepsilon_{zS}$)， x 也相同地消失，影像在子午平面縮為一條線且通過弧矢焦點，這是弧矢焦線 (sagittal focus line)。介於這兩個焦點之間的影像是圓形的。圖形參見圖 3.7。

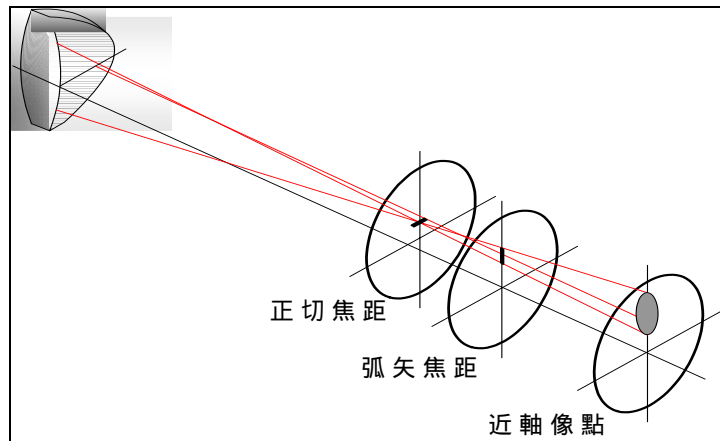


圖 3.6 正切焦線 (tangential focal line) 與弧矢焦線 (sagittal focus line)。

3.2.6 畸變 (distortion)

對於理想影像還有一個條件(亦即條件 3)，就是影像在幾何上必須與物相似。假設像是共點的 (stigmatic)，並且在理想像平面上形成。然而，為了使影像是理想的，則共點像高必須滿足 (3.1) 式。通常不會是如此。而且雖然光線位移與孔徑無關，但將與物高 h 有關。所以一個物體的共點像會由理想影像處移出，而且影像在幾何上也跟物體不相似。影像的畸變定義為光線 ($\rho=0$) 的像差，亦即是畸變是主光線的像差。畸變通常以理想像高 h 的百分比來表示。參見圖 3.4 右上角可以看到，畸變值在 -0.0005% 之內，畸變相當小，這是由於場角很小，而孔徑闌 (aperture stop) 在透鏡面上。由於方形格子的影像結果，正畸變稱枕形畸變 (pincushion distortion)，而負畸變則稱為桶形畸變 (barrel distortion)。

3.3 像差多項式 (Aberration polynomials)

像差大小的詳細計算包括了一個冗長的代數式。但對於一個軸對稱系統的像差多項式，其普遍型式可以單獨由對稱情況推導出。對稱性告訴我們，在一個旋轉對稱的系統中，沿著一條光線的光程當系統對光軸旋轉時，光程不改變。我們使用瞳孔座標 (y, x) 及物件座標 (h_y, h_x) 來描述光線。在這一點上，我們沒有限制物點落於 yz 平面上。由於旋轉對稱，任何對於光程的多項式近似必須是 y, x, h_y 及 h_x 的函數 (這些量是旋轉不變量)，則這些多像式必須是：

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 \\ & xh_x + yh_y \\ & h_x^2 + h_y^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

現在我們使用系統的旋轉對稱性，我們只需要考慮在 h_y 軸上的物點。所以設定 $h_x=0$ ，且定義旋轉不變量之變數為：

$$\begin{aligned} \xi &= \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \eta &= \rho h \cos \theta = yh_y \\ \zeta &= h^2 = h_y^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

最普遍的光程展開是把上面所有項目的組合全放進來。可以一次取一項，也可以一次取兩項，或是一次取三項等等，則全部的波前(overall wavefront)可寫成：

$$W = W_2 + W_4 + W_6 + \Lambda \quad (3.15)$$

先一次取一項，我們得到近軸影像，亦即：

$$W_2 = a_1 \rho^2 + a_2 \rho h \cos \theta + a_3 h^2 \quad (3.16)$$

第一項是說明聚焦的波前曲率(curvature of the wavefront)，第二項是負責放大率的正比於物高的傾斜(tilt)量，第三項則是不影響影像的活塞誤差(piston error) (與瞳孔座標無關的項)。

最低階的像差包含了一次取兩項的旋轉不變量，即：

$$\xi^2, \eta^2, \zeta^2, \xi\eta, \xi\zeta, \eta\zeta \quad (3.17)$$

用圓柱座標表示這些量，我們對波前得到第三階貢獻 (已省略了 ζ^2 項中的活塞誤差)

$$W_4 = b_1 \rho^4 + b_2 \rho^3 h \cos \theta + b_3 \rho^2 h^2 \cos^2 \theta + b_4 \rho^2 h^2 + b_5 \rho h^3 \cos \theta \quad (3.18)$$

為了方便，將 (3.18) 式之第三階波前像差用 Seidel 項 S_I-S_V 來表示，其結果如下：

$$W_4 = \frac{1}{8} S_I \rho^4 + \frac{1}{2} S_{II} \rho^2 h \cos \theta + \frac{1}{2} S_{III} \rho^2 h^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{4} (S_{II} + S_{III}) \rho^2 h^2 + \frac{1}{2} S_{IV} \rho h^2 \cos \theta \quad (3.19)$$

光線位移正比於光程的微分，所以若 W 是光程，則光線位移如下：

$$\begin{aligned} \varepsilon_y \alpha \frac{\partial W}{\partial y} \\ \varepsilon_x \alpha \frac{\partial W}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.20)$$

如果我們微分 (3.19) 式，可以找到最低階橫向光線像差其形式如下：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{3y} &= \sigma_1 \rho^3 \cos \theta + \sigma_2 (2 + \cos 2\theta) \rho^2 h + (3\sigma_3 + \sigma_4) \rho h^2 \cos \theta + \sigma_5 h^3 \\ \sigma_{3x} &= \sigma_1 \rho^3 \sin \theta + \sigma_2 \rho^2 h \sin 2\theta + (\sigma_3 + \sigma_4) \rho h^2 \sin \theta \end{aligned} \quad (3.21)$$

由於 ρ 及 h 次方總合加到 3，所以上式稱為第三階像差多項式。如果我們一次取三個旋轉不變量 (W 中)，並且執行相似的微分，可得到第五階像差多項式。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{5y} &= \mu_1 \rho^5 \cos \theta + (\mu_2 + \mu_3 \cos 2\theta) \rho^4 h + (\mu_4 + \mu_6 \cos^2 \theta) \rho^3 h^2 \cos \theta \\
 &\quad + (\mu_7 + \mu_8 \cos 2\theta) \rho^2 h^3 + \mu_{10} \rho h^4 \cos \theta + \mu_{12} h^5 \\
 \varepsilon_{5y} &= \mu_1 \rho^5 \sin \theta + \mu_3 \rho^4 h \sin 2\theta + (\mu_5 + \mu_6 \cos^2 \theta) \rho^3 h^2 \sin \theta + \mu_9 \rho^2 h^3 \sin 2\theta \\
 &\quad + \mu_{11} \rho h^4 \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

理論上，可以使用相同的步驟來找第七階、第九階等的像差多項式。上式中的 σ 及 μ 項稱為像差係數 (aberration coefficient)，雖然可能有 12 個第五階像差，但事實上只有 9 個是獨立的。在一個第三階像差已被修正的系統中，則存在下列恆等式：

$$\begin{aligned}
 \mu_2 &= \frac{3}{2} \mu_3 \\
 \mu_4 &= \mu_5 + \mu_6 \\
 \mu_7 &= \mu_8 + \mu_9
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

圖 3.8 列出第三階像差的各種表象 (H=Lagrange 不變量， n' =像空間中的折射率， v'_a =像空間中的軸光線角度， v'_b =像空間中的主光線角度， $\bar{S}_I$ = 對主光線作估算的第一個 Seidel 總合)。

名稱	波前	橫向	縱向
球差(Spherical Aberration)	$S_I/8$	$S_I/(2n'u_a')$	$-S_I/(2n'u_a'^2)$
彗差(Coma)	$S_{II}/2$		
弧矢彗差(Sagittal Coma)		$S_{II}/(2n'u_a')$	
正切彗差 (Tangential Coma)		$3 S_{II}/(2n'u_a')$	
像散(Astigmatism)	$3 S_{III}/4$		
T-S 距離(T-S distance)			$S_{III}/(n'u_a'^2)$
Petzval 場曲 (Petzval)	$S_{IV}/4$		
像面到 Petzval 面 (Image Plane to Petzval surface)			$-S_{IV}/(2n'u_a'^2)$
Petzval 面的曲率 (Curvature of			$-n'S_{IV}/H^2$

Petzval surface)			
弧矢場的曲率 (Sagittal Field of curvature)		$(S_{III} + S_{IV})/(2n'u_a')$	$-(S_{III} + S_{IV})/(2n'u_a'^2)$
正切場的曲率 (Tangential Field of Curvature)		$(3S_{III} + S_{IV})/(2n'u_a')$	$-(3S_{III} + S_{IV})/(2n'u_a'^2)$
畸變(Distortion)	$S_V/2$	$S_V/(2n'u_a')$	
畸變比例 (Fractional distortion)		$S_V/2H$	
入射瞳球差 (Entrance Pupil Spherical aberration)		$\bar{S}_I/(2n'u_b')$	$-\bar{S}_I/(2n'u_b'^2)$

圖 3.8 三階像差

3.3 像差型態 (Aberration types)

像差型態 (橫向光線像差) 是藉由與它們相關的 ρ 及 h 來特徵化。那些與 ρ 的奇次方相關的像差是像散，而與 ρ 的偶次方相關的相像是彗差。與 ρ 及 h 相關且組合成 $\rho^{n-s}h^s$ 型式的像差，如果 $(n-s)$ 為偶數，則稱為第 n 階、第 s 度彗差，如果 $(n-s)$ 是奇數，則是第 n 階，第 $(n-s)$ 度像散。例如，與 ρ 及 h 相關且組合成 ρ^3h^2 的 ε_5 中的像差是第五階，立方像散(cubic astigmatism)。

檢視像差多項式，可以看出每一階中有兩個新的像差型態被引入，一個是像散，另一個則是彗差。藉由第三階像差可以看出了四個顯著的像差型態，而在第五階像差中則有六個像差型態、第七階中有八個，依此類推。有一些像差型態，特別是那些在第三階及第七階中表現的，都有簡單名稱，參見圖 3.9 以比較其細節。

名稱	像差形式	第三階	第五階
球差 (Spherical aberration)	第 n 階，第 n 度像散	σ_1	μ_1
彗差或線性彗差 (Coma or linear coma)	第 n 階，第一度或線性彗差	σ_2	μ_2, μ_3

像散(Astigmatism)	第 n 階, 第一度或線性像散	σ_3, σ_4	μ_{10}, μ_{11}
畸變(distortion)	第 n 階, 第 n 度彗差	σ_5	μ_{12}
軸向球差(oblique spherical aberration)	第 n 階, 第(n-2)度像散		μ_4, μ_5, μ_6
橢圓彗差(elliptical coma)	第 n 階, 第(n-2)度彗差		μ_7, μ_8, μ_9

圖 3.9 像差與像差多項式

圖 3.9 中六個像差型態中的每一個都是由一些常數來支配, 這些係數的號碼隨著型態的不同而改變。接下來的幾節中, 我們一方面考慮像差型態及係數之間的關係, 另一方面則考慮影像斑點的型式來作一些說明。只有六種在第三階及第五階中的型態將被詳細考慮, 另外我們也做一些人為的假設來使得只有單一像差型態出現。

為了表現像差, 我們使用光線交切曲線 (ray-intercept curves) 及環狀孔徑曲線 (annular aperture curve) 來描述, 環狀孔徑曲線是在固定場點及孔徑半徑下改變角度 θ (360 度) 所繪出的 ε_y 對 ε_x 的圖。

3.3.1 球面像差 (Spherical aberration)

最簡單的像差是球面像差, 它表現在光軸上一個物點之影像中。很顯然地, 軸上物體的影像徑向對稱於光軸, 且 ε 值如下:

$$\varepsilon = \sigma_1 \rho^3 + \mu_1 \rho^5 + \tau_1 \rho^7 + \Lambda \quad (3.24)$$

像散像差的定義暗示了球面像差是像散的。事實上, 第 n 階球面像差就是第 n 階第 n 度像散。對任何階的球面像差之孔徑曲線是中心在理想影像上的圓圈, 如圖 3.10 所示。

第三階球差

第五階球差

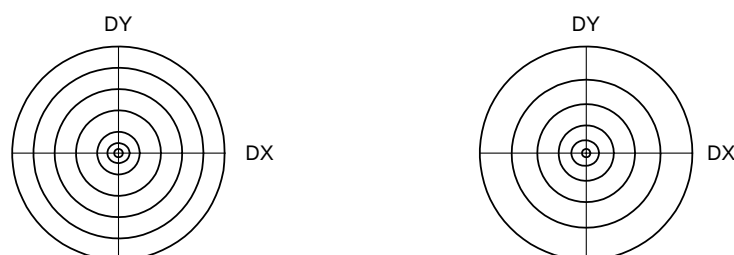


圖 3.10 球面像差環狀孔徑曲線表象

第三階球面像差的子午面光線交切曲線 (meridional ray-intercept curves) 是一個三次多項式，在原點附近為平面，而對較大的正及負的孔徑的變化會快速增加。這個案例與較高階唯一的重大差別是子午曲線在高階項時較平坦。也就是說，高階像差遇到一個足夠大的孔徑才會變得顯著。圖 3.11 的光線欄交切曲線描述了此一效應，在圖 3.11 下面的兩個曲線顯示了加入等量的第三階及第五階球面像差，而且也加入了焦點位移來達到平衡，其中加入了焦點位移的動作導致光線交切曲線在原點傾斜。

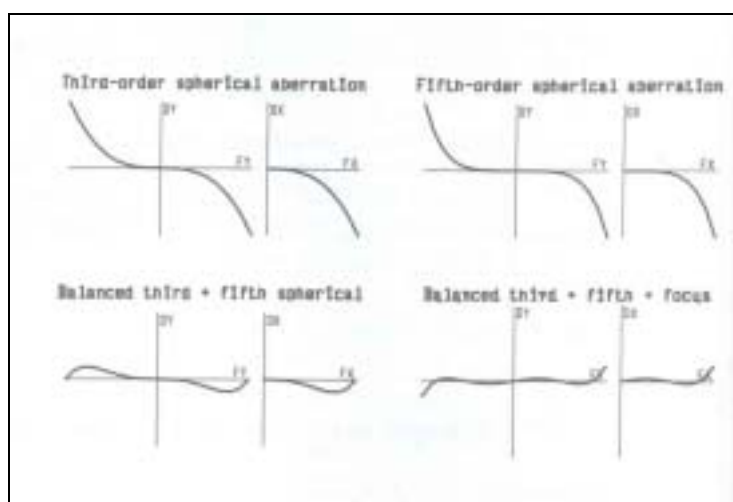


圖 3.11 第三階及第五階球面像差光線交切曲線表象

3.3.2 線性彗差 (Linear coma)

與物高有關的像差型態，也許最重要的是與 h 線性相關的線性彗差。線性彗差是最簡單的彗差像差，而且也是自引入「彗形的 (comatic)」項以來最經典的像差。第五階線性彗差藉由下式來表示：

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \sigma_2(2 + \cos 2\theta)\rho^2 h + (\mu_2 + \mu_3 \cos 2\theta)\rho^4 h \\ \varepsilon_x &= \sigma_2\rho^2 h \sin 2\theta + \mu_3\rho^4 h \sin 2\theta\end{aligned}\quad (3.25)$$

對線性彗差本性的了解可以藉由假設除了那些單一階的彗差外，其它像差係數均

為 0 來得到。在這假設下，環狀的孔徑曲線 (annular aperture curve) 包含了一組圓形，每一個代表的是不同的 ρ (參見圖 3.12)。

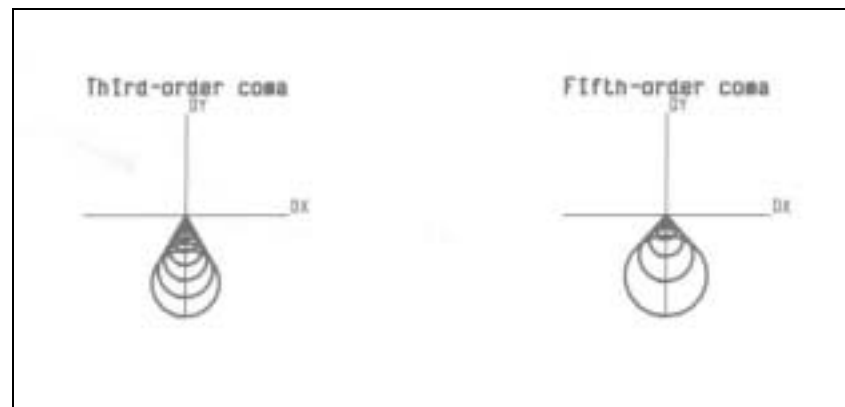


圖 3.12 線性彗差環狀孔徑曲線表象

考慮第三階彗差，如果 σ_2 為正，則影像斑點直接徑向地離開光軸；而如果 σ_2 為負，則會徑向地朝向光軸。這兩個案例關係到正的（過度修正）及負的（修正不足）彗差。影像是高度非對稱性，全部落於近軸影像的一邊。在成像表現這是非常糟糕的事。對第三階彗差的子午曲線是拋物線的，而弧矢曲線是延著 x 軸的一條直線。高階彗差的像差曲線與第三階彗差相似，但子午曲線較平坦些，參見圖 3.13。

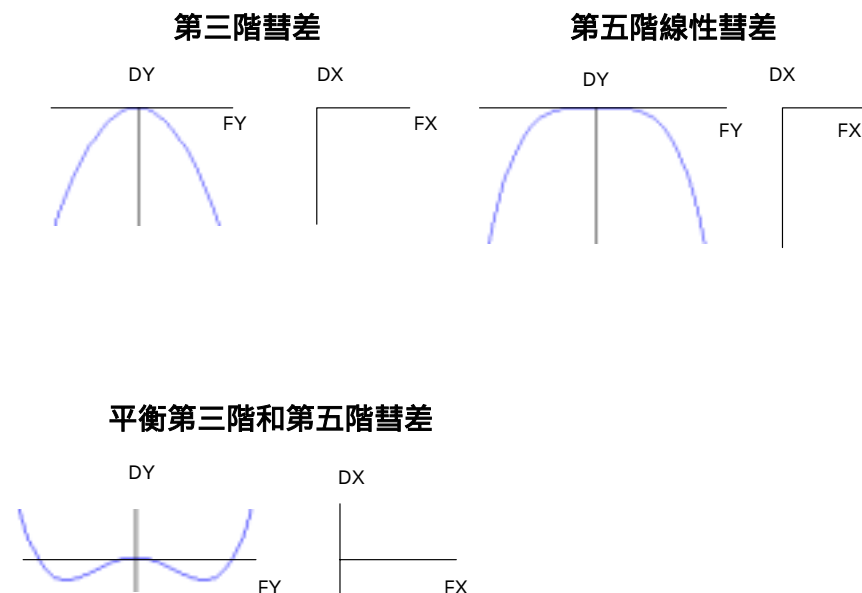


圖 3.13 第三階彗差光線交切曲線表象

孔徑 ρ 上的兩條子午光線交在影像上的同一點 (這是由於任何彗差像差都是週期 π 的 θ 函數)，同時孔徑 ρ 上的弧矢光束 (sagittal ray) 對也交在影像上的單一點，而此點落於影像的子午面部份。藉由線性彗差的係數間的恆等式，我們有下列的

重要結果：

對於一個給定的孔徑，子午光線的最大位移是第三階線性彗差的最小位移量之 3 倍，第五階線性彗差最小位移量之 5 倍。

3.3.3 線性像散(Linear astigmatism)

在 (3.21) 式的第三階像差多項式中的第三項是孔徑變量 ρ 線性項。根據我們的定義，這些項是第三階線性像散。由 (3.21) 及 (3.22) 式，線性像散由下式給予到第五階：

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= (3\sigma_3 + \sigma_4)\rho h^2 \cos \theta + \mu_{10}\rho h^4 \cos \theta \\ \varepsilon_x &= (\sigma_3 + \sigma_4)\rho h^2 \sin \theta + \mu_{11}\rho h^4 \sin \theta\end{aligned}\quad (3.26)$$

在此第三階係數 σ_3 及 σ_4 的重要性應該被提及。由於像散造成正切的 (tangential) 及弧矢的 (sagittal) 影像變得較尖銳，但兩者在縱向上有移位，亦即光線交切曲線是直線，但對於子午光線及弧矢線則傾斜度不同。此外，線的傾斜度與場角 (field angle) 有關，請見圖 3.14。

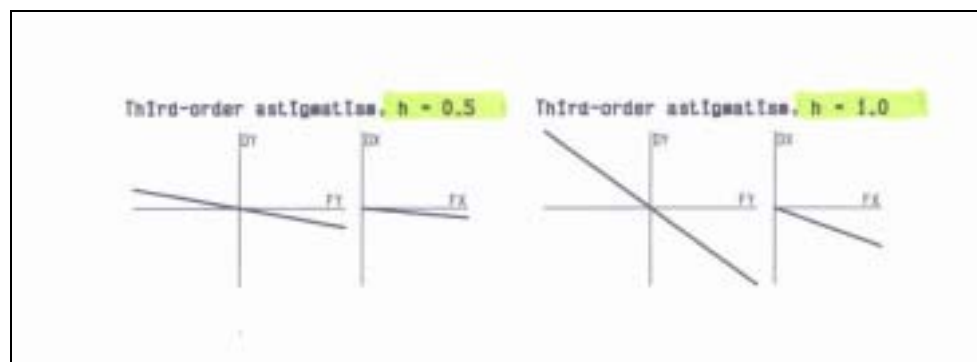


圖 3.14 不同 h 下第三階線性像散光線交切曲線表象

如圖 3.15 所示，第三階像散的孔徑曲線是在近軸像平面上的一個橢圓。在正切及弧矢的焦點處，曲線變成直線，就如圖 3.6 所示。

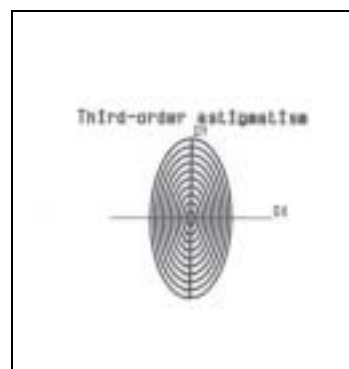


圖 3.15 第三階像散環狀孔徑曲線表象

像散的焦點差正比於 σ_3 ，如果此係數消失，則在所謂的 Petzval 面上會形成對主光線附近的一窄光束的共點影像。此 Petzval 面的凹陷(sag)為：

$$\varepsilon_{zp} = -\frac{\sigma_4}{v_a'} h^2 \quad (3.27)$$

係數 σ_4 正比於此面的曲率，所以有時候稱為 Petzval 曲率係數。比較第三階正切及弧矢的場面 (field surface)，對 Petzval 面的凹陷，可以知道這兩個場面在 Petzval 面的同一邊；若 σ^3 為正，則在 Petzval 面的右邊，若為負，則在左邊。此外，從 (3.26) 式，由 Petzval 面至第三階正切的場面 (tangential field surface) 所量測到平行於光軸的距離是 Petzval 面到第三階弧矢場面 (sagittal field surface) 間距離的 3 倍。

在第一章中 (參考 (1.52) 式)，Petzval 半徑 (Petzval 曲率的例數) 之式子表示它只跟透鏡的曲率及折射率有關。因此，對於一個給定的系統，Petzval 場曲 (Petzval curvature of field) 與下列無關：

- 物體的位置
 - 孔徑闌的位置
 - 鏡面的間隔
 - 任何兩個鄰近鏡面 (假設此兩個鏡面定義一介質中的透鏡) 的彎曲度
- 由於這些特性，Petzval 曲率必須在系統設計中非常早的時期就加以控制，否則之後很難調整。

3.3.4 畸變 (distortion)

畸變是被歸類為第 n 階第 n 度彗差的像差型態。之前我們在光束覓跡數據中已有討論。修正到第五階，則畸變的像差多項式為：

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \sigma_5 h^3 + \mu_{12} h^5 \\ \varepsilon_x &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

在這裡所出現的係數 σ 及 μ 是第三階及第五階畸變的係數。如果係數為正，則相關的畸變稱為枕狀畸變(pincushion distortion)，若為負，則稱桶狀畸變(barrel distortion)。理論上，藉由平衡第三階桶狀畸變與第五階枕狀畸變等等，畸變可以控制。實際作法，畸變通常是讓系統對孔徑闌有縱向的對稱來達到控制作用，此時所有的彗差都會減低。

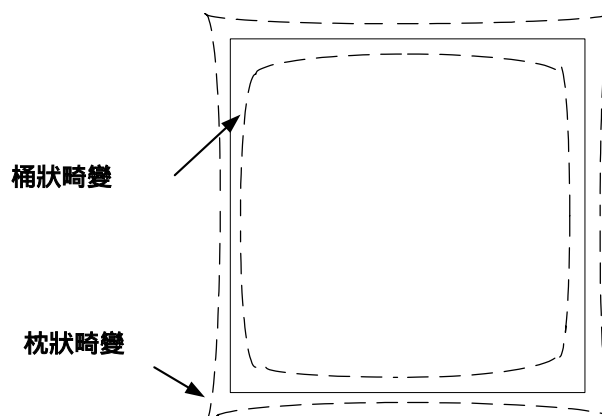


圖 3.16 第三階桶狀畸變與第五階枕狀畸變

3.3.5 軸外球差 (Oblique spherical aberration)

前面四節已討論第三階像差。當級數增加，則在那一個級數中所表現的像差型態的數目也增加。例如，在第三階中有 4 種像差型態，第五階中有 6 種，第七階中有 8 種，依此類推，每一階引入兩種新的像差型態，其中一種是像散型態，另一種則是彗差型態。階數愈高，特徵化這些新像差的獨立係數的數目就愈多。因此，當階數增加時，像差變得愈來愈複雜。

第五階中引入的兩種新的像差型態，也就是像散型態為五階立方像散的，此兩種像差型態通常稱為軸外球差(oblique spherical aberration)，可以由下式給定：

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= (\mu_4 + \mu_6 \cos^2 \theta) p^3 h^2 \cos \theta \\ \varepsilon_x &= (\mu_5 + \mu_6 \cos^2 \theta) p^3 h^2 \sin \theta\end{aligned}\quad (3.29)$$

就如同在第五階及更高階中出現的其他像差型態，軸外球差比球面像差、線性彗差、線性像散或是畸變還難控制。係數 μ_5 支配弧矢光線的軸外球差， μ_4 及 μ_6 則支配了子午光線的軸外球差。

在 (3.29) 式中出現 3 個係數或多或少令人錯覺。由於 $\mu_4 = \mu_5 + \mu_6$ ，(假設第三階像差為 0，比較 (3.23) 式)，光線級數的軸外球差只由兩個獨立係數所支配。除了像差的大小正比於場角的平方之外，軸外球差的光線交切曲線與那些正常的球面像差相似，在圖 3.17 我們可以看到 $\mu_5 = \mu_6$ 的特例。

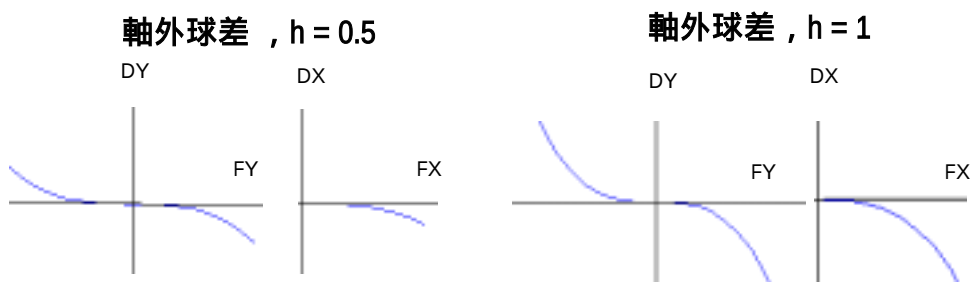


圖 3.17 軸外球差光線交切曲線表象

通常，軸外球差的孔徑曲線之討論並不是像球面像差或線性彗差那般直接。這是因為這裡包括了兩個獨立係數(μ_5 及 μ_6)。在圖 3.17 是不同比例的值所繪出的環狀孔徑曲線。

對於 μ_5/μ_6 為較大的值時，我們得到卵形曲線(oval shaped curve)，而 μ_5/μ_6 介於 0 至 1 之間，卵形的邊緣被拉進。在 $\mu_5/\mu_6=0$ 時，兩邊會在 y 軸上互相接觸， μ_5/μ_6 小於 0，曲線自己會沿著 y 相交於兩個點，而且在 μ_5/μ_6 接近-1 時，這些交點會移離原點，且較外面的環狀線變得較密。當 μ_5/μ_6 限制在-1 時，曲線在交於軸上的點為尖頭。(註：在圖 3.17 m_5/m_6 代表 μ_5/μ_6)

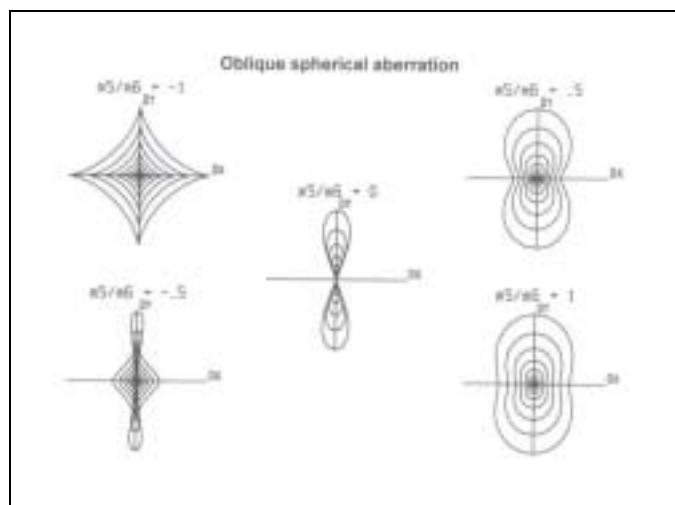


圖 3.18 軸外球差環狀孔徑曲線表象

3.3.6 橢圓彗差 (Elliptical coma)

接下來繼續討論第五階像差的橢圓彗差，也就是正比於 $\rho^2 h^3$ 的像差。此像差是第 n 階，第 (n-2) 階度彗差 (亦即第五階立方彗差) 的傳統型態。修正到第五階，則橢圓彗差由下式給定：

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= (\mu_7 + \mu_8 \cos 2\theta) \rho^2 h^3 \\ \varepsilon_x &= \mu_9 \rho^2 h^3 \sin 2\theta\end{aligned}\quad (3.30)$$

橢圓彗差的光線交切曲線相似正常彗差的,除了那些像差大小增加為場角立方的之外(不是線性),參見圖 3.19。



圖 3.19 橢圓彗差光線交切曲線表象

雖然在(3.30)式的橢圓彗差中出現 3 個係數,從(3.23)式我們可以看到 $\mu_7 = \mu_8 + \mu_9$ (假設第三階像差為 0),所以也是只是只有 2 個獨立係數。圖 3.19 畫出不同 μ_8/μ_9 比例值的孔徑曲線。(註：在圖 3.19 m_8/m_9 代表 μ_8/μ_9)

在 μ_8/μ_9 為較大的負值時,曲線為橢圓,且切於 x 軸的與近軸光束交點上。一如圖 3.19 所示,橢圓形在軸的下面,但當 μ_7 為正值時,有一序列的橢圓形在軸的上面。對於 μ_8/μ_9 比例為大的正值時,孔徑曲線相似於正常的第三階像差,至於 μ_8/μ_9 比例值非常小時,橢圓的離心率(eccentricity)大大地增加,而在 $\mu_8=0$ 時,橢圓退化成直線。

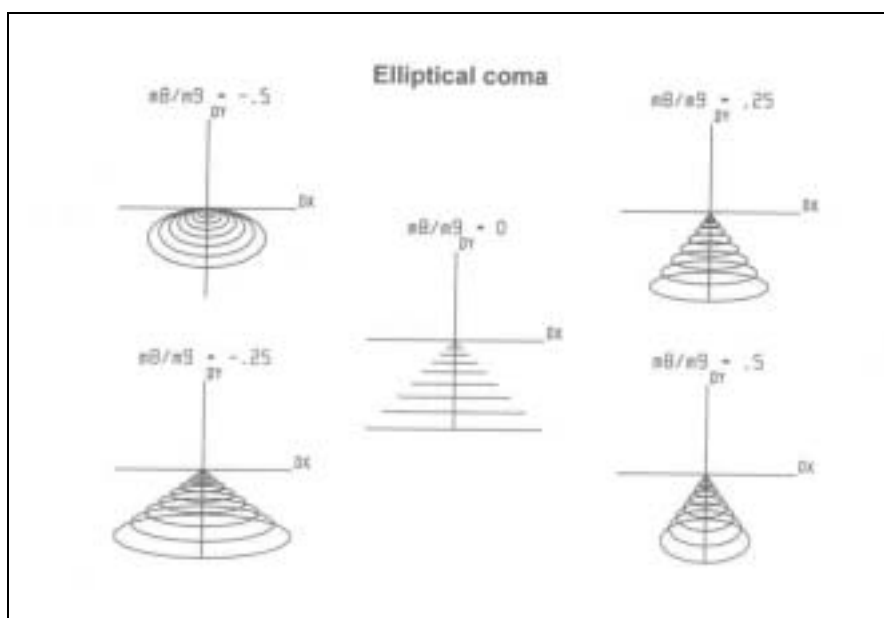


圖 3.20 橢圓彗差環狀孔徑曲線表象

3.3.7 瞳孔像差 (Pupil aberration)

到目前為止的討論是考慮光束在理想像平面上的位移。像差是由光束離開物

體及通過入射瞳孔之處來決定。當入射瞳孔成像於出射瞳孔，就會產生一組這樣的像差。藉由軸光束及主光束的角色互換可以得到這種像差。在 OSLO 中，它們表示為 PSA3、PCM3、PAS3 及 PDS3。關係到 PTZ3 的瞳孔像差，事實上是相同，所以不用另外計算。

在一個典型的透鏡系統中，瞳孔像差傾向比影像像差小，這是因為瞳孔位於透鏡附近，而且瞳孔放大率接近 1。然而，在有外加瞳孔的透鏡中，例如，目鏡（eyepiece）或掃描透鏡，瞳孔像差在限制影像品質中扮演了一個重要角色。

3.4 像差係數之計算(Computation of aberration coefficients)

在 OSLO 中，像差係數藉由「calculate>>Aberration Analysis」選單中的指令來計算。第三階像差使用「sei」指令來計算及顯示。數值輸出與像差模型的設定有關，這些模型可以是不轉變的（unconverted）橫向（transverse）或角度（angular）。對於在聚焦模型中估計的系統，預定的輸出是橫向的，這是提供近軸影像平面中的橫向像差（transverse aberration）；對於非聚焦系統，預定輸出是角度型式（angular form）；而不轉變的輸出則提供 Seidel 總合 Si 係數，這些係數可以用圖 3.7 的表格再轉換成各種表現方式。圖 3.21 比較了 OSLO 及 Smith 的「Modern Lens Design」這本書有關像差的命名法。

名稱	OSLO	Smith
球差	SA3	TSC
彗差	CMA3	CC
像散	AST3	TAC
Pertzval 場曲	PTZ3	TPC
畸變	DIS3	DC

圖 3.20 OSLO 及 Smith 的「Modern Lens Design」像差命名

在 OSLO 中有兩個指令被用以作計算第五階像差，正常的「fif」指令計算第五階，類比於第三階像差；「buc」指令讓第五階像差以 Buchdahl 所使用的型式表現，現在符號是標記 MU1，，MU12 對應於（3.22）式中的 μ_1 ，， μ_{12} 。第五階像差的命名顯示於圖 3.21，這是由使用「fif」指令而輸出的。

名稱	OSLO	Buchdahl
球差	SA5,MU1	μ_1
彗差	CMA5,MU3	μ_3
像散	AST5,(MU10-MU11)/4	$(\mu_{10} - \mu_{11})/4$

匹茲堡場曲	PTZ5,(5MU11-MU10)/4	$(5\mu_{11}-\mu_{10})/4$
畸變	DIS5,MU12	μ_{12}
正切軸向球差	MU4+MU6	$\mu_4+\mu_6$
弧矢軸向球差	MU5	μ_5
正切橢圓慧差	MU7+MU8	$\mu_7+\mu_8$
弧矢橢圓慧差	MU9	μ_9

圖 3.22OSLO 中與 Buchdahl 係數對照

軸外球差及橢圓慧差在 OSLO 中並不明白算出，雖然它們是由 Buchdahl 係數表示。

3.5 Aldis 定理(Aldis theorem)

Aldis 理論是一個「有限像差公式」的一個範例，亦即是對光線的全部像差作一公式表示。這跟 Seidel (第三階)、第五階等等的像差不同，這些像差其級數展開都有被截斷。這一個理論是由 M. L. Aldis 導出，但是在 A. Cox 的書《A System of Optical Design》公開。也許最清楚的 Aldis 理論推導是在 W. T. Welford 《Aberration of Optical System》(1986) 的 9.2 節。在給予此理論的真正公式之前，需要定義一些符號：通常，在反射或折射後的量測由撇號 (') 表示；對於選擇近軸場 (paraxial field) 及孔徑的 Lagrange 不變量以符號 H 標記，而折射率為 n，近軸軸光線角是 u，以及入射角的近軸軸光線角為 i。然後在鏡面 j 對近軸軸光線的折射不變量記為 $A_j=n_ji_j=n'_ji'_j$ ，一條真實光線與鏡面 J 交於點 (x_j,y_j,z_j) ，且方向餘弦 (K_j,L_j,M_j) 。Welford 對於總橫向光線像差 $(\varepsilon_x,\varepsilon_y)$ 定出如下：

$$\varepsilon_x = \frac{-1}{n'_k u'_k M'_k} \sum_{j=1}^k \left[A_j Z_j \Delta K_j + \frac{A_j x_j}{M'_j + M_j} \Delta(K_j^2 + L_j^2) \right] \quad (3.31)$$

$$\varepsilon_y = \frac{-1}{n'_k u'_k M'_k} \sum_{j=1}^k \left[A_j Z_j \Delta L_j + \frac{A_j y_j - H}{M'_j + M_j} \Delta(K_j^2 + L_j^2) \right] \quad (3.32)$$

在上面的式子中， Δ 通常表示在折射或反射下對應括號內的量之改變。Cox 及 Welford 將上式延伸而可以使用到非球面(aspheric)上。顯然地，一條真實光線必須用來覓跡以來計算上面的表示式。而在給定像面一個參考點下， ε_x 及 ε_y 可以從像面上的光線數據作計算。Aldis 理論的價值是它可以算出面到面的基礎 (surface-by-surface) (如同 Seidel 像差係數所作的) 的像差，所以像差的來源可以被確認。

在 OSLO 中，SCP 指令「*aldis」可以用作計算對總光線像差 (total ray aberration) 的一個特定之面的貢獻，此計算對於軸對稱系統的折射式或反射面是有效的。所支援的面型態為球面、椎形、標準非球面 (ad, ae, af, ag) 及到十階的「asr」面，指令語法為：

*aldis fby fy fx

fby 是比例物高 (fractional object height)，fy 及 fx 是比例瞳孔座標。這個指令也可以由「使用者主選單 (User main menu)」的「General Analysis pull-right」獲得，則每一面對於光線的總像差之貢獻將被展示，而且為了比較，光線像差的 Seidel 值也會被顯示。

需注意的是 Aldis 理論像 Seidel 像差係數一樣，都是對於近軸像點算出光線像差。而近軸像點不見得跟像面與參考光束之交點同一點。因此，如果像面不在近軸焦點上，DELTA Y 與 DELTA x 不見得會與 OSLO 用光束覓跡算出的 DY 與 DX 值一樣。在輸出中標記為「SUM」的值是與近軸像點有關的總光線像差及總 Seidel 像差，標記為「DYref」的值是所選擇的場之近軸影像加上「DELTA Y」減去參考光線與像面的截距之 SUM 值。「DELTA Y」及「DYref」的「SUM」值之差別是在於指示有多少總光線像差是由畸變所引起。

3.6 Zernike 分析

在上一節中使用的級數展開只是一個表現光學系統的像差的方法，另一個常見的方法則是使用 Zernike 多項式來表示波前，此一表示式在干涉量度學 (interferometer) 及光學測試 (optical testing) 中廣泛地被使用。Zernike 多項式是無窮多項式的完全集 (complete set)。而這些多項式在單位圓內部彼此正交。由於正交化係數的 Zernike 分解與所使用的展開的級數無關，與先前像差多項式的係數是受到展開的多項式之最大級數影響有所不同。在此提醒讀者，用於 Zernike 多項式的術語、歸一化及標記並沒有統一，這裡的討論是根據 Wyand 及 Creath 的文章 (Appl. Optics and Optical Engineering Vol.XI, ed.R.R.Shannon and J.C. Wyant, 1992)。

如上所述，對單位圓內部的連續變數 ρ 及 θ ，Zernike 多項式為正交，而在非單位圓的其他區域或其它分離式數據則非正交。讀者需注意到的是 Zernike 多項式的正交性的條件是否被確定；另一個需注意的是，在 Wyant 及 Creath 文章內註明了 Zernike 多項式表現不適合的情況 (例如，錐形元件的配置 空氣擾動)；總之，若當作數值技術，Zernike 多項式的使用者需注意到用來支配其使用的假

Zernike 多項式有 3 個辨認特徵：

- 1、 $Z(\rho, \theta)$ 多項式可以分解為徑向座標 ρ 的函數 $R(\rho)$ 乘上角座標 θ 的函數 $G(\theta)$ ：

$$Z(\rho, \theta) = R(\rho)G(\theta) \quad (3.33)$$

角函數 $G(\theta)$ 是一個連續的週期函數，週期為 2π ，而且此座標系統旋轉一個 α 角不會改變此多項式的型式，亦即一個 Q 及 α 的旋轉必須與 $Q+\alpha$ 的旋轉相等，因此：

$$G(\theta + \alpha) = G(\theta)G(\alpha) \quad (3.34)$$

函數 $G(\theta)$ 的通解 (general solutions) 是複數指數函數 (complex exponential)

$$G(\theta) = e^{\pm im\theta} \quad (3.35)$$

其 m 為 0 或正整數。

- 2、徑向函數 $R(\rho)$ 是 n 級的 ρ 之多項式且不包含 ρ 級數小於 m 。
- 3、如果 m 是偶數整數，則徑向函數 $R(\rho)$ 是偶函數；如果 m 是奇數整數，則 $R(\rho)$ 是奇函數。

徑向多項式標記為 $R_n^m(\rho)$ ，在球座標案例中則為 Jacobi 多項式，對徑向多項式的正交條件為：

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) R_{n'}^m(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2(n+1)} \delta_{nn'} \quad (3.36)$$

在上式中， $\delta_{nn'}$ 是 kronecker delta，即若 $n=n'$ ，則 $\delta_{nn'}=1$ ；若 $n \neq n'$ ，則 $\delta_{nn'}=0$ 。在文獻中有多種歸一化，在這裡我們應該使用的是：

$$R_n^m = 1 \quad (3.37)$$

讀者宜小心，由上式所給予的歸一化是很平常的，但不見得到處通用。

一旦要算出徑向多項式的明確型式，可將多項式分解如下：

$$R_{2n-m}^m(\rho) = Q_n^m(\rho) \rho^m \quad (3.38)$$

其中級數為 $2(n-m)$ 的多項式 $Q_n^m(\rho)$ 為：

$$Q_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{n-m} (-1)^s \frac{(2n-m-s)!}{s!(n-s)!(n-m-s)!} \rho^{2(n-m-s)} \quad (3.39)$$

通常，真實多項式 (使用正弦及餘弦) 使用於複數的指數函數，在這個案例中，波前像差 $W(\rho, \theta)$ 的 Zernike 展開式有下列型式：

$$W(\rho, \theta) = \overline{W} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n Q_n^0(\rho) + \sum_{m=1}^n Q_n^m(\rho) \rho^m (B_{nm} \cos m\theta + C_{nm} \sin m\theta) \right] \quad (3.40)$$

其中 $\overline{W}$ 是波前像差的平均值， A_n 、 B_{nm} 及 C_{nm} 是展開係數。由於「第零階」多項式是常數項 1，而所有其他的 Zernike 多項式（超過單位圓）的平均值為零， W 的平均值是這個「第零項」的係數 A_0 。依此順序，上式可寫成：

$$W(\rho, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n Q_n^0(\rho) + \sum_{m=1}^n Q_n^m(\rho) \rho^m (B_{nm} \cos m\theta + C_{nm} \sin m\theta) \right] \quad (3.41)$$

對於一個旋轉對稱系統，物體落於子午平面上，所以波前像差對稱於 yz 平面。如此，只有 θ 的偶函數（即餘弦項）不為零。

由於 Zernike 多項式的正交性，計算波前像差的變動 σ^2 是容易的。

$$\sigma^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_n^2}{2n+1} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \frac{B_{nm}^2 + C_{nm}^2}{2n+1-m} \right] \quad (3.42)$$

均方根（rms）波前誤差或方均根光程差（rms OPD），只是變異 σ^2 的平方根，也就是上式中波前改變量 σ 。上式波前變異的表示式(即(3.42)式的開根號)指出 Zernike 多項式的一個重要性質。由於波前誤差透過 Zernike 係數一個特殊總和(見 3.42 式)來表示。所以方均根波前像差的極小化視 Zernike 多項式級數而定。低階像差的引入會增加方均根波前像差值。換言之，每個 Zernike 項代表一個最佳平衡的像差，代表一個像差最小貢獻量。而眾多低階像差的加成決定了方均根值，這個方均根值在某種意味上而言，給予我們一個波前誤差的極小值。

當表現一個波前的 Zernike 展開的 Zernike 分析時，被 OSLO 所使用的 Zernike 多項式有 37 個，再一次提醒讀者，雖然這個級數很平常，但仍有其他的級數也被使用。

n	m	No.	Zernike 多項式
0	0	0	1
1	1	1	$\rho \cos \theta$
		2	$\rho \sin \theta$
	0	3	$2\rho^2 - 1$
2	2	4	$\rho^2 \cos 2\theta$
		5	$\rho^2 \sin 2\theta$
	1	6	$(3\rho^2 - 2)\rho \cos \theta$
		7	$(3\rho^2 - 2)\rho \sin \theta$
	0	8	$6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$

3	3	9	$\rho^3 \cos 3\theta$
		10	$\rho^3 \sin 3\theta$
	2	11	$(4\rho^2 - 3)\rho^2 \cos 2\theta$
		12	$(4\rho^2 - 3)\rho^2 \sin 2\theta$
	1	13	$(10\rho^4 - 12\rho^2 + 3)\rho \cos \theta$
		14	$(10\rho^4 - 12\rho^2 + 3)\rho \sin \theta$
	0	15	$20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1$
4	4	16	$\rho^4 \cos 4\theta$
		17	$\rho^4 \sin 4\theta$
	3	18	$(5\rho^2 - 4)\rho^3 \cos 3\theta$
		19	$(5\rho^2 - 4)\rho^3 \sin 3\theta$
	2	20	$(15\rho^4 - 20\rho^2 + 6)\rho^2 \cos 2\theta$
		21	$(15\rho^4 - 20\rho^2 + 6)\rho^2 \sin 2\theta$
	1	22	$(35\rho^6 - 60\rho^4 + 30\rho^2 - 4)\rho \cos \theta$
		23	$(35\rho^6 - 60\rho^4 + 30\rho^2 - 4)\rho \sin \theta$
	0	24	$70\rho^8 - 140\rho^6 + 90\rho^4 - 20\rho^2 + 1$
5	5	25	$\rho^5 \cos 5\theta$
		26	$\rho^5 \sin 5\theta$
	4	27	$(6\rho^2 - 5)\rho^4 \cos 4\theta$
		28	$(6\rho^2 - 5)\rho^4 \sin 4\theta$
	3	29	$(21\rho^4 - 30\rho^2 + 10)\rho^3 \cos 3\theta$
		30	$(21\rho^4 - 30\rho^2 + 10)\rho^3 \sin 3\theta$
	2	31	$(56\rho^6 - 105\rho^4 + 60\rho^2 - 10)\rho^2 \cos 2\theta$
		32	$(56\rho^6 - 105\rho^4 + 60\rho^2 - 10)\rho^2 \sin 2\theta$
	1	33	$(126\rho^8 - 280\rho^6 + 210\rho^4 - 60\rho^2 + 5)\rho \cos \theta$
		34	$(126\rho^8 - 280\rho^6 + 210\rho^4 - 60\rho^2 + 5)\rho \sin \theta$
	0	35	$252\rho^{10} - 630\rho^8 + 560\rho^6 - 210\rho^4 + 30\rho^2 - 1$
6	0	36	$924\rho^{12} - 2772\rho^{10} + 3150\rho^8 - 1680\rho^6 + 420\rho^4 - 42\rho^2 + 1$

圖 3.23 Zernike 多項式

參考圖 3.23 中，Zernike 項 0 被看作常數項。既然所有其他的 Zernike 多項式超過單位圓之平均為 0，則項目 0 的係數是波前的平均 OPD。項目 1-3 表示波前的近軸性質（y 傾斜，x 傾斜及焦點），項目 4-8 表現第三階像差，項目 9-15 表示第五階像差，項目 16-24 則是第七階像差，項目 25-35 是第九階像差，而項目 36 是第十一階球差。

參考文獻

1. OSLO Optical Reference version 5 (Sinclair Optics, 1996) Chapter 3。本版稿子仍依其改寫。
2. 在 OSLO Optical References 原文注明此章內容參照 “Analysis of the aberrations of a symmetric system”, note prepared by P. J. Sands, CSIRO, Australia. 我們不知道此文出處，但是仍依原文加注。

習題

1. 請用 Matlab 之類軟體，重現各式像差的基本圖形樣式。
2. 在 OSLO 中，請選用各式 catalog lens，並用 OSLO 定出其各式像差係數，再重作題一。