第 26 卷第 4 期
2003 年 8 月

合肥工业大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Vol. 26 No. 4
Aug. 2003

高斯光束质量因子的研究

邓小玖， 储德林， 胡继刚， 张士杰
(合肥工业大学 理学院，安徽 合肥 230009)

摘 要：应用标量光场横截面上光强的精确定义，计算了基模高斯光束的光强二阶矩及光束质量因子，结果表明，当基模高斯光束的束腰半径 $\omega_0 \gg \lambda$ 时，光束质量因子 M^2 非常接近于 1，当光束束腰半径较小时，计算的光束质量因子存在较大误差。文章进一步用严格的光场角谱表示法计算了非傍轴标量高斯光束的质量因子，并对一些相关问题进行了讨论。

关键词：基模高斯光束；非傍轴高斯光束；光强二阶矩；光束质量因子

中图分类号：O436.1 **文献标识码**：A **文章编号**：1003-5060(2003)04-0501-04

Study of the quality factor of Gaussian beam

DENG Xiao-jiu， CHU De-lin， HU Ji-gang， ZHANG Shi-jie
(School of Sciences, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: Based on the accurate formula of the light intensity of the scalar light field, the second intensity moment and quality factor of the fundamental mode Gaussian beam have been calculated. The results show that the beam quality factor is approximate to 1 if $\omega_0 \gg \lambda$, and the error of calculation is much larger when the beam waist radius is too small. Furthermore, the quality factor of non-paraxial scalar Gaussian beam has been calculated by using the angular spectrum representation and some important problems related to the beam quality factor have been discussed.

Key words: fundamental mode Gaussian beam; non-paraxial Gaussian beam; the second intensity moment of light; beam quality factor

0 引 言

激光束的 M^2 因子又称光束的质量因子，是激光光束质量的评估和控制理论基础。基于传统光强二阶矩定义的光束质量因子 M^2[1,2] 为

$$M^2 = \frac{R \times \theta}{R_0 \times \theta_0} \tag{1}$$

其中，R 为实际光束的束腰半径，R_0 为基模高斯光束的束腰半径，θ 为实际光束的远场发散角，θ_0 为基模高斯光束的远场发散角。由于传统光强二阶矩定义的光束质量因子 $M^2 \geqslant 1$，基模高斯光束作为光束质量的统一比较标准，具有最好的光束质量，即 $M^2 = 1$。然而，传统光强二阶矩是建立在傍轴标量场理论基础

收稿日期：2002-12-23
作者简介：邓小玖(1960—)，男，安徽繁昌人，合肥工业大学教授，硕士生导师.

上的，只适用于傍轴标量光束，而不适用于非傍轴标量光束。文献[3]采用标量光场的光强精确定义，把二阶矩理论推广到非傍轴标量光束，并定义了非傍轴标量光束的质量因子，即

$$M^2 = \pi W_{\min} \frac{\tan\theta}{\lambda} \tag{2}$$

毫无疑问，对非傍轴标量高斯光束质量因子的研究，同样是研究其它实际非傍轴标量光束质量因子的基础。本文采用光强的精确定义，首先计算了基模高斯光束的光强二阶矩与光束质量因子。结果表明，由于基模高斯光束仅是波动方程的傍轴近似解，在非傍轴区$J_z(x,y,z)<0$[4]，基模高斯光束的精确光强二阶矩定义并不严格成立，当光束束腰半径较小时($\omega_0\sim\lambda$)，计算的光束质量因子存在较大误差。

1 基模高斯光束的质量因子

由于传统光强的定义只适用于傍轴标量光场，而光强二阶矩是对整个横截面的积分，因而严格意义下的标量光场的光强二阶矩(光束半宽)的定义必须采用标量光场的光强精确定义。由文献[5,6]可知，垂直于光束传输轴横截面上标量光场的光强可精确表示为

$$I = J_z = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{ik}\Phi^*(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial z}\Phi(\boldsymbol{r})\right) \tag{3}$$

则基于光强精确定义的光束半宽$W(z)$为

$$W^2(z) = \frac{2}{P(z)}\iint_{\infty} J_z(x,y,z)(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

式中 $P(z)$——z处横截面上标量光束的总能流，$P(z)=\iint_{\infty} J_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

对基模高斯光束[4]为

$$P(z)=\frac{\pi}{2}\left(\omega_0^2-\frac{1}{k^2}\right) \tag{5}$$

$$J_z = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\exp\left(\frac{-2(x^2+y^2)}{\omega^2}\right)\cdot \left[1-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\cdot\frac{1-(k\omega_0^2/2z)^2}{z^2(1+(k\omega_0^2/2z)^2)^2}-\frac{2/(k\omega_0)^2}{1+(2z/k\omega_0^2)^2}\right] \tag{6}$$

由(4)、(5)、(6)式可求得

$$W^2(z) = \frac{\omega_0^2}{1-1/(k\omega_0)^2} + \frac{4}{(k\omega_0)^2}\cdot\frac{1-2/(k\omega_0)^2}{1-1/(k\omega_0)^2}\cdot z^2 \tag{7}$$

则在标量光场光强的精确定义下，基模高斯光束的束腰半径及远场发散角分别为

$$W_{\min} = \omega_0/\sqrt{1-1/(k\omega_0)^2} \tag{8}$$

$$\tan\theta = \lim_{Z\to\infty}\frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2}{k\omega_0}\sqrt{(k^2\omega_0^2-2)/(k^2\omega_0^2-1)} \tag{9}$$

将(8)、(9)式代入(2)式，可求得基模高斯光束的质量因子

$$M^2 = \sqrt{k^2\omega_0^2(k^2\omega_0^2-2)/(k^2\omega_0^2-1)^2} \tag{10}$$

由(10)式可知，基模高斯光束的束腰半径$\omega_0\geqslant\lambda$时，基于光强精确定义的光束质量因子M^2非常接近于1，而且随光束束腰半径的增大迅速趋向于1，光强的传统定义近似成立。然而，由于基模高斯光束仅是波动方程的傍轴近似解，在非傍轴区$J_z(x,y,z)<0$，则基于光强精确定义下的基模高斯光束横截面上的总能流及光强二阶矩并不严格成立，特别是当光束束腰半径较小时($\omega_0\sim\lambda$)，基模高斯光束作为波动方程的傍轴近似解不成立，因而计算的光束质量因子存在较大误差。实际上在高斯光束束腰半径很小的

情况下，还必须考虑倏逝波对光场的贡献[7,8]，求解高斯光波的非傍轴解。

2 非傍轴标量高斯光束的质量因子

采用严格的光场角谱表示方法，进一步计算实际非傍轴标量高斯光束的质量因子，设$z=0$处的光场分布为

$$\Phi(x,y,0)=\exp[-(x^2+y^2)/\omega_0^2] \tag{11}$$

则光扰动的角谱为

$$\psi_0(f_\rho)=\iint_{-\infty}^{+\infty}\exp[-(x^2+y^2)/\omega_0^2]\exp[-i2\pi(xf_x+yf_y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\omega_0^2\exp(-\pi^2\omega_0^2f_\rho^2) \tag{12}$$

由于(12)式给出的角谱$\psi_0(f_\rho)$是实函数，由文献[2,9]可求得实际非傍轴标量高斯光束的束腰半径及远场发散角分别为

$$W_{\min}^2=W^2(0)=\frac{1}{\pi P(z)}\int_0^{1/\lambda}\frac{\partial[\psi_0(f_\rho)\gamma]}{\partial f_\rho}\cdot\frac{\partial[\psi_0(f_\rho)]}{\partial f_\rho}f_\rho\mathrm{d}f_\rho \tag{13}$$

$$\tan^2\theta=\lambda^2\overline{f_\rho^2}=\frac{4\pi\lambda^2}{P(z)}\int_0^{1/\lambda}|\psi_0(f_\rho)|^2\frac{f_\rho^3}{\gamma}\mathrm{d}f_\rho \tag{14}$$

其中

$$P(z)=2\pi\int_0^{1/\lambda}\sqrt{1-\lambda^2f_\rho^2}|\psi_0(f_\rho)|^2f_\rho\mathrm{d}f_\rho \tag{15}$$

(15)式为z处横截面上非傍轴标量高斯光束的总能流，其光束质量因子M^2与倏逝波无关。将(12)式代入(13)、(14)式，再由(2)式可计算实际非傍轴标量高斯光束的质量因子M^2，数值计算结果与文献[10]一致。根据$\omega_0\ll\lambda$和$\omega_0\gg\lambda$两种极限情况，分析非傍轴标量高斯光束M^2因子特性。

2.1 $\omega_0\ll\lambda$时非傍轴标量高斯光束M^2因子特性

$\omega_0\ll\lambda$时，在(13)、(14)、(15)式的积分中，对(17)式给出的角谱$\psi_0(f_\rho)$取一级近似为

$$\psi_0(f_\rho)\approx\pi\omega_0^2(1-\pi^2\omega_0^2f_\rho^2)$$

可求得

$$W_{\min}^2=W^2(0)\approx2\omega_0^2(1-2\pi^2\omega_0^2/5\lambda^2) \tag{16}$$

$$\tan^2\theta=\lambda^2\overline{f_\rho^2}\approx4(1-4\pi^2\omega_0^2/5\lambda^2) \tag{17}$$

再由(2)式，求得$\omega_0\ll\lambda$时非傍轴标量高斯光束的M^2因子为

$$M^2\approx2\sqrt{2}\pi\omega_0(1-3\pi^2\omega_0^2/5\lambda^2)/\lambda \tag{18}$$

由(17)、(18)式可知，$\omega_0\to0$时，$\tan\theta\to2$，即远场发散角$\theta\to63.435°$，光束质量因子$M^2\to0$。容易证明$\theta_{\max}=63.435°$是任意非傍轴标量光束远场发散角的极大值，任意非傍轴标量光束的质量因子M^2都随其束腰半径$W_{\min}$趋于0而趋向于0。

2.2 $\omega_0\gg\lambda$时非傍轴标量高斯光束M^2因子特性

$\omega_0\gg\lambda$时，在(13)、(14)、(15)式的积分中，对$\gamma=\sqrt{1-\lambda^2f_\rho^2}$取一级近似为

$$\gamma\approx1-\lambda^2f_\rho^2/2$$

可求得

$$W_{\min}^2=W^2(0)\approx\frac{\omega_0^2}{1-1/(k\omega_0)^2} \tag{19}$$

$$\tan^2\theta = \lambda^2 \overline{f_\rho^2} \approx \frac{4}{(k\omega_0)^2} \cdot \frac{1+2/(k\omega_0)^2}{1-1/(k\omega_0)^2} \tag{20}$$

再由(2)式,可求得$\omega_0 \gg \lambda$时非傍轴标量高斯光束的M^2因子为

$$M^2 \approx \sqrt{\frac{1+2/(k\omega_0)^2}{(1-1/(k\omega_0)^2)^2}} \approx 1 + \frac{2}{k^2\omega_0{}^2} \tag{21}$$

由(21)式可知,$\omega_0 \gg \lambda$时,基于光强精确定义的非傍轴标量高斯光束的质量因子M^2非常接近于1,而且随光束束腰半径的增大迅速趋向于1,这时高斯光束的传播特性可近似用基模高斯光束来描述,其光强的传统定义近似成立。

3 结束语

运用标量光场光强的精确定义,把二阶矩理论推广到非傍轴标量光束,当光束束腰半径远小于波长时,其光束质量因子M^2可以小于1,并随光束的束腰半径$W_{\min}$趋于0而趋向于0。

文献[11]在证明非傍轴标量光束的质量因子$M^2>1$时,采用了忽略倏逝波的近似,使用的边界条件是$f_x^2+f_y^2 \geqslant 1/\lambda^2$时,$\psi_0(f_x,f_y)\equiv 0$。显然当光束的束腰半径$W_{\min}$很小时($\omega_0<\lambda$),这种边界条件并不满足,忽略倏逝波的近似不成立。因而文献[11]的结论不包括光源线度(或光束束腰半径)远小于波长时的非傍轴标量光束。非傍轴标量光束束腰处光场的角谱可以表示为实函数时,光束的质量因子M^2与倏逝波无关,但必须强调指出,这与忽略倏逝波近似是完全不同的。对傍轴标量光束,由传统光强二阶矩定义的光束质量因子$M^2 \geqslant 1$,与量子力学的不确定关系有一定的对应关系[2],光束质量因子M^2是光束质量的评估和控制的理论基础,光束质量因子M^2的取值越小则光束的质量越好。对非傍轴标量光束,光束质量因子M^2与量子力学的不确定关系没有明显的关系。当光束束腰半径远小于波长时,光束质量因子M^2可以小于1,其意义还有待进一步研究。另外,对光束束腰半径较小的非傍轴光束,还必须考虑光场的矢量特性[5,6,12],即矢量场的能量传输用坡印廷矢量S来描述,垂直于光束传输轴(设为z轴)的横截面上的光强为$I=S_z$,这时可用S_z的二阶矩讨论光束的传输特性,定义光束的质量因子,但计算一般比较复杂。

[参 考 文 献]

[1] 杨焕雄,赵道木,陆璇辉,等.关于光束质量因子M^2的几点看法[J].中国激光,1997,A24(8):709-714.

[2] 邓小玖,胡继刚,刘彩霞,等.光束质量因子的研究[J].合肥工业大学学报(自然科学版),2002,25(6):1 187-1 190.

[3] 曹 清,邓锡铭,郭 弘.非傍轴光束的光束质量因子.I定义[J].光学学报,1996,16(9):1 217-1 222.

[4] 邓小玖,王建国,蒋 凉,等.标量高斯光束的能量传输[J].合肥工业大学学报(自然科学版),2001,24(6):1 095-1 097.

[5] 曹 清,邓锡铭,郭 弘.横截面上光强的精确表述[J].光学学报,1996,16(7):897-902.

[6] 邓小玖,吴本科,肖 苏.微小孔近场衍射的能量传输[J].光学学报,2001,21(12):1 432-1 436.

[7] 邓小玖,吴本科.微小孔近场衍射中的传播波和倏逝波[J].计算物理,2001,18(3):211-214.

[8] Agrawal G P,Pattanayak D N. Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation[J]. J Opt Soc Am,1979,69(4):575-578.

[9] Porras M A. Finiteness and propagation law of the power density second-order moment for diffracted scalar light beams[J]. Optik, 1999,110(9): 417-420.

[10] Porras M A. Non-paraxial vectorial moment theory of light beam propagation [J]. Opt Comm,1996,127(1):79-95.

[11] 曹 清,邓锡铭.非傍轴光束的光束质量因子.II特性分析 [J].光学学报,1996,16(10):1 345-1 349.

[12] 曾小东,梁昌洪,安毓英.远轴高斯波的矢量场理论[J].物理学报,1999,48(7):1 254-1 260.

(责任编辑 吕 杰)